微分方程

考试大纲

考试内容
常微分方程的基本概念
变量可分离的微分方程
齐次微分方程
一阶线性微分方程
伯努利（Bernoulli）方程
全微分方程
可用简单的变量代换求解的某些微分方程
可降阶的高阶微分方程
线性微分方程解的性质及解的结构定理
二阶常系数齐次线性微分方程
高于二阶的某些常系数齐次线性微分方程
简单的二阶常系数非齐次线性微分方程
欧拉（Euler）方程
微分方程的简单应用

差分与差分方程的概念
差分方程的通解与特解
一阶常系数线性差分方程

考试要求
1. 了解微分方程及其阶、解、通解、初始条件和特解等概念
2. 掌握变量可分离的微分方程及一阶线性微分方程的解法
3. 会解齐次微分方程、伯努利方程和全微分方程，会用简单的变量代换解某些微分方程
4. 会用降阶法解微分方程
5. 理解线性微分方程解的性质及解的结构
6. 掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法，并会解某些高于二阶的常系数齐次线性微分方程
7. 会解自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程
8. 会解欧拉方程
9. 会用微分方程解决一些简单的应用问题

了解差分与差分方程及其通解与特解等概念
了解一阶常系数线性差分方程的求解方法
会用微分方程求解简单的经济应用问题

概念

- **微分方程**：表示未知函数的导数与自变量关系的方程.
- **微分方程的初始条件**：确定微分方程的特解的一组常数.
- **微分方程的阶**：微分方程中未知函数的导数的最高阶数.
- **线性微分方程解的性质**
- **微分方程的解**：满足微分方程的函数.
- **微分方程的通解**：含有与微分方程的阶相同个数的任意常数的解.
- **二阶线性微分方程解的结构**
- **微分方程的特解**：微分方程的不含任意常数的解.

一阶微分方程

可分离变量方程

解微分方程任意常数的写法

一侧为框框的函数

1. 整体代换，框框换成u
2. 等式两端对x求导
3. 代入题干转化为u关于x的可分离变量
4. 两端同时积分解u
5. 转化回去

一侧为x分之y的函数（齐次方程）

一侧为xy线性组合的函数

一阶线性（齐次）方程

框框dx框框dy

dx前面是y，dy前面是x

转化为可分离

齐次结构

同除dx
同除dy/dx前的系数
转化为齐次

非齐次结构

- x最高次比y次数高
  同除dx
  同除dy/dx前的系数
  转化为y关于x的一阶线性
- y最高次比x次数高
  同除dy
  同除dx/dy前的系数
  转化为x关于y的一阶线性
- 最高次相同
  按第一种尝试
  行不通再颠倒dy/dx

全微分方程（数学一二）

1. 偏积分
2. 全微分（观察法）
3. 二类线（取折线）

框框y撇

除框框

- xy撇
- 除x
- 2yy撇
- 三角y撇
- 其他

Bernoulli 方程（数学一）

伯努利，1—阿尔法

微分方程综合题

导数定义

含德尔塔x
同 +德尔塔x
等式两端同时取极限
对离变量后两端同时对x积分
含f(x+y)
写导数定义，套题干方程

含变限积分

若f连续
f先劳前可导且含有初始条件
如果导下去能做就一直导
如果导出来高阶变系数就不导了
重新构造辅助函数（换元）
令变限积分g=g(x),则f=g撇

导数应用

切法线切点为动点

二重积分

二重积分积分区域含t（变区域）

定积分应用

面积体积端点为动点

高阶微分方程

常系数

二阶常系数线性齐次

1. 改写为r（导几次就几次方）
2. 解特征方程
3. 三种情况

二阶常系数线性非齐次

特解待定系数
1. 非齐次项f(x)不含三角
   指数照抄
   多项式次数相同
   乘高次幂
2. 非齐次项f(x)含三角
   指数照抄
   多项式取高次
   乘高次幂

高阶常系数线性齐次

差分方程（数学三）

1. 一阶常系数线性差分方程
2. 二阶差分
   差两次转化为一阶差分

二阶变系数

将题干给的换元代入

二阶可降阶（数一二）

1. 不显含y型
   令y撇=p，y两撇=p撇
   转化为p关于x的一阶微分方程
2. 不显含x型
   立y撇=p，y两撇=p撇对x导
   同乘dy
   转化为p关于y的一阶微分方程
   解出来p=g(y),即y撇=dy/dx=g(y)
   转化为y关于x的可分离变量

欧拉方程（数学一二）

✅识别：
二次方二阶导
一次方一阶导
0次方不求导
✅做法：
1. 令x等于e的t次方
2. x方y撇=Dy
   x方y两撇=D方y-Dy
   代入后转化为
   y关于t的二阶常系数线性（非）齐次
   求通解
3. t=lnx换回来

三角换元

反函数

- 微分方程
  - 考试大纲
  - 概念
    - 微分方程
    - 微分方程的阶
    - 微分方程的解
    - 微分方程的通解
    - 微分方程的特解
    - 微分方程的初始条件
    - 线性微分方程解的性质
    - 二阶线性微分方程解的结构
  - 一阶微分方程
    - 可分离变量方程
      - 解微分方程任意常数的写法
    - 一侧为框框的函数
      - 一侧为x分之y的函数（齐次方程）
      - 一侧为xy线性组合的函数
    - 一阶线性（齐次）方程
    - 框框y撇
      - xy撇
      - 2yy撇
      - 三角y撇
      - 其他
    - 框框dx框框dy
      - dx前面是y，dy前面是x
      - 齐次结构
      - 非齐次结构
        - x最高次比y次数高
        - y最高次比x次数高
        - 最高次相同
      - 全微分方程（数学一二）
    - Bernoulli 方程（数学一）
  - 高阶微分方程
    - 常系数
      - 二阶常系数线性
        - 二阶常系数线性齐次
        - 二阶常系数线性非齐次
      - 高阶常系数线性齐次
      - 差分方程（数学三）
    - 二阶变系数
      - 二阶可降阶（数一二）
      - 欧拉方程（数学一二）
      - 三角换元
      - 反函数
  - 微分方程综合题
    - 导数定义

- 导数应用
- 定积分应用
- 含变限积分
- 二重积分