反常积分知识点

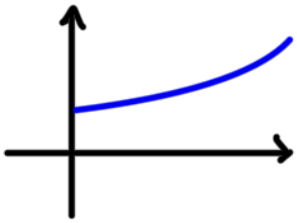
—澄潇宇、一只羊&南门朔

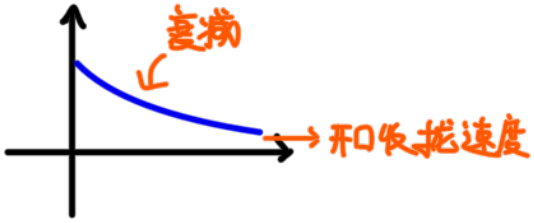
概念

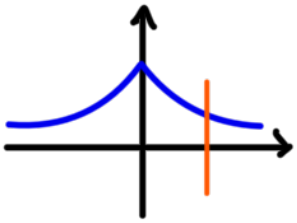
正常积分

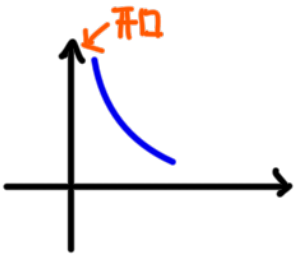
$\int_a^b f(x)dx$

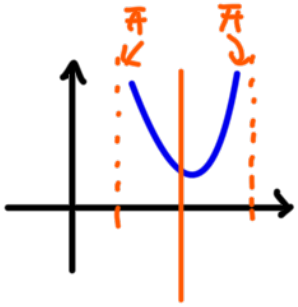
有限区间（底） 有界函数（高） → 破坏一个 → 反常 { 无限区间 → 无穷积分；无界函数 → 瑕积分 }









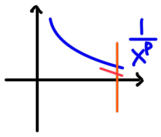


无穷积分，函数趋于零的速度越快，越容易收敛
瑕积分 ，函数趋于无穷的速度越慢，越容易收敛

比较审敛

基准函数

$\int_{a>0}^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx \Big/ \int_{a>0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^p}dx \Rightarrow \begin{cases} p>1, 收 \\ p\le 1, 发 \end{cases}$



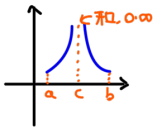
p介同样x $\frac{1}{x^p}$ 2

p介, 收敛到x轴V介, 更窄, S更趋向于收敛到一个值

p2_V2, 更宽, 更易发散

$\int_{a>1}^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}dx \begin{cases} p>1 收 \\ p=1 \begin{cases} q>1, 收 \\ p\le 1, 发 \end{cases} \\ p<1, 发 \end{cases}$

$a\le x\le b$ $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}dx \Big/ \int_a^b \frac{1}{(c-x)^p}dx \begin{cases} p<1, 收 \to 0<p<1 \\ p\ge 1, 发 \end{cases}$ 正常, p=-2, $(x-a)^2$



$\int_0^{a<x<1}\frac{1}{x^p|\ln x|^q}dx \begin{cases} p<1, 收 \\ p=1 \to \begin{cases} q>1 收 \\ q\le 1 发 \end{cases} \\ p>1, 发 \end{cases}$

比较判别法

比较判别法 $\longrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx \Big/ \int_0^{1} f(x)dx$

$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ x\to 0}} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} x^p\cdot f(x) = l \begin{cases} 0<l<+\infty, \int_1^{+\infty} f(x)dx 与 \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} 同敛散 \\ 同所同敛散 \\ l=0, \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} 收 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx 收 \\ 大收则小收 \\ l=+\infty, \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p} 发 \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)dx 散 \\ 小散则大散 \end{cases}$

若非非负

$\int_a^{+\infty}|f(x)|收 \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)dx 收$

大 小

实操思路

1.若多开口拆区间转化为单开口

2.无穷积分考虑x趋于∞时被积函数情况

利用抓大头，不等式放缩向基准函数靠拢

瑕积分考虑x趋于瑕点时被积函数情况

利用等价，提非零因子，因式分解向基准函数靠拢

经典例题—审敛

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

$x\to+\infty,\ \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\sim\frac{1}{\sqrt{x}\cdot x}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$，$\frac{3}{2}>1$，收

$\int_0^{1}\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}dx$

$x\to0^+,\ \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$，$\frac{1}{2}<1$，收

$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}dx$



$I=\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}+\int_1^{2}+\int_2^{+\infty}$

$\int_0^{\frac{1}{2}}$：$\to\frac{1}{\ln 2}$

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}$：$\to\frac{1}{\ln 2}$

$\int_1^{2}$：$x\to1^+$

$\int_2^{+\infty}$：$x\to1^-,\ \frac{1}{x\ln^2 x}\sim\frac{1}{(x-1)^2}$，发散

$\Rightarrow$发

$\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

$x\to0^+,\ \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\sim\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$收

$\frac{1}{\sqrt{x}}\to\infty$，$\ln x\to\infty$

$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\ln x\to\infty$（收小）

$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\ln x\cdot\sqrt{x}\to0$（发大）

$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}}=\ln x\cdot x^{\frac{1}{4}}\to0$（大收，$\in(\frac{1}{2},1)$）

$\int_1^{+\infty}\frac{x^2}{3x^4-x^2+1}dx$

$x^2=t,\ \Delta<0,\ a>0$

$x\to+\infty,\ \frac{1}{3x^2}$收

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

$x\to+\infty,\ \frac{\sin^2 x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$

收　收

$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x(\ln\ln x)^2}dx$

$\frac{1}{x(\frac{1}{2}\ln x)^2}=\frac{4}{x\ln^2 x}$收

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\cos x}\cdot\sin x}dx$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

I_1　I_2

I_1：$x\to0^+,\ \frac{1}{\sqrt{\cos x}\cdot\sin x}\sim\frac{1}{x}$发

I_2：$x\to\frac{\pi}{2},\ \frac{1}{\sqrt{\cos x}\cdot\sin x}\sim\frac{1}{\sqrt{\cos x}}$

$\frac{1}{\sqrt{\cos(\frac{\pi}{2}+x-\frac{\pi}{2})}}=\frac{1}{\sqrt{-\sin(x-\frac{\pi}{2})}}\sim\frac{1}{\sqrt{-(x-\frac{\pi}{2})}}$

$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}-x}}=\frac{1}{(\frac{\pi}{2}-x)^{\frac{1}{2}}}$收

$\int_0^{1}\frac{1}{\ln x}dx$

$-\int_0^{1}-\frac{1}{\ln x}dx$

$-\frac{1}{\ln x}\sim-\frac{1}{x-1}$发

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}}dx$

$\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$收

$x\to0^+,\ \lim_{x\to0^+}\frac{\ln\sin x}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}}=0$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}+x^2}dx$

$x\to+\infty,\ \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2}=\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$，$\frac{1}{2}<1$，发

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2+x^{\frac{3}{2}}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=+\infty$，$\frac{1}{\sqrt{x}}$发

$\int_1^{2}\frac{1}{\ln x}dx$

$x\to1^+,\ \frac{1}{\ln x}\sim\frac{1}{x-1}$，$p=1$，发

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\ln x}dx$

$I_1=\int_1^{2}+\int_2^{+\infty}$

I_1：$x\to1^+,\ \frac{1}{\ln x}\sim\frac{1}{x-1}$

I_2：$x\to+\infty$，$x>\ln x$，$\frac{1}{x}<\frac{1}{\ln x}$，发$\Rightarrow$发

$(\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{x}}=\frac{x}{\ln x}\to+\infty)$

$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

$x\to+\infty,\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\to\infty$，$\frac{1}{\sqrt{x}}\to0$，$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$，发

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}}=\ln x\cdot x^{\frac{1}{2}}\to+\infty$发，小

经典例题—已知收敛确定范围

$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^\alpha}dx$

$I=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$

$x\to 0^+,\ \frac{x^2}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-2}},\ \alpha-2<1,\ \alpha<3$

$x\to+\infty,\ \frac{\ln x^2}{x^\alpha}=\frac{2\ln x}{x^\alpha}\sim\frac{1}{x^\alpha},\ \alpha>1$

$\Rightarrow 1<\alpha<3$

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}dx$

$I=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$

$I_1: x\to 0^+,\ \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^\alpha}\right|\le\frac{1}{x^\alpha}$

收 $\Leftarrow \alpha<1$

$I_2: x\to+\infty,\ \frac{1}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha+1}},\ \alpha+1>1$

$\alpha>0$

$\Rightarrow 0<\alpha<1$

$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha(1+x)}dx$

$I=\int_0^1+\int_1^{+\infty}$

$I_1: x\to 0^+,\ \frac{x}{x^\alpha}=\frac{1}{x^{\alpha-1}},\ \alpha-1<1\Rightarrow\alpha<2$

$I_2: x\to+\infty,\ \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^{\alpha+1}},\ \alpha+1>1,\ \alpha>0$

$\Rightarrow 0<\alpha<2$