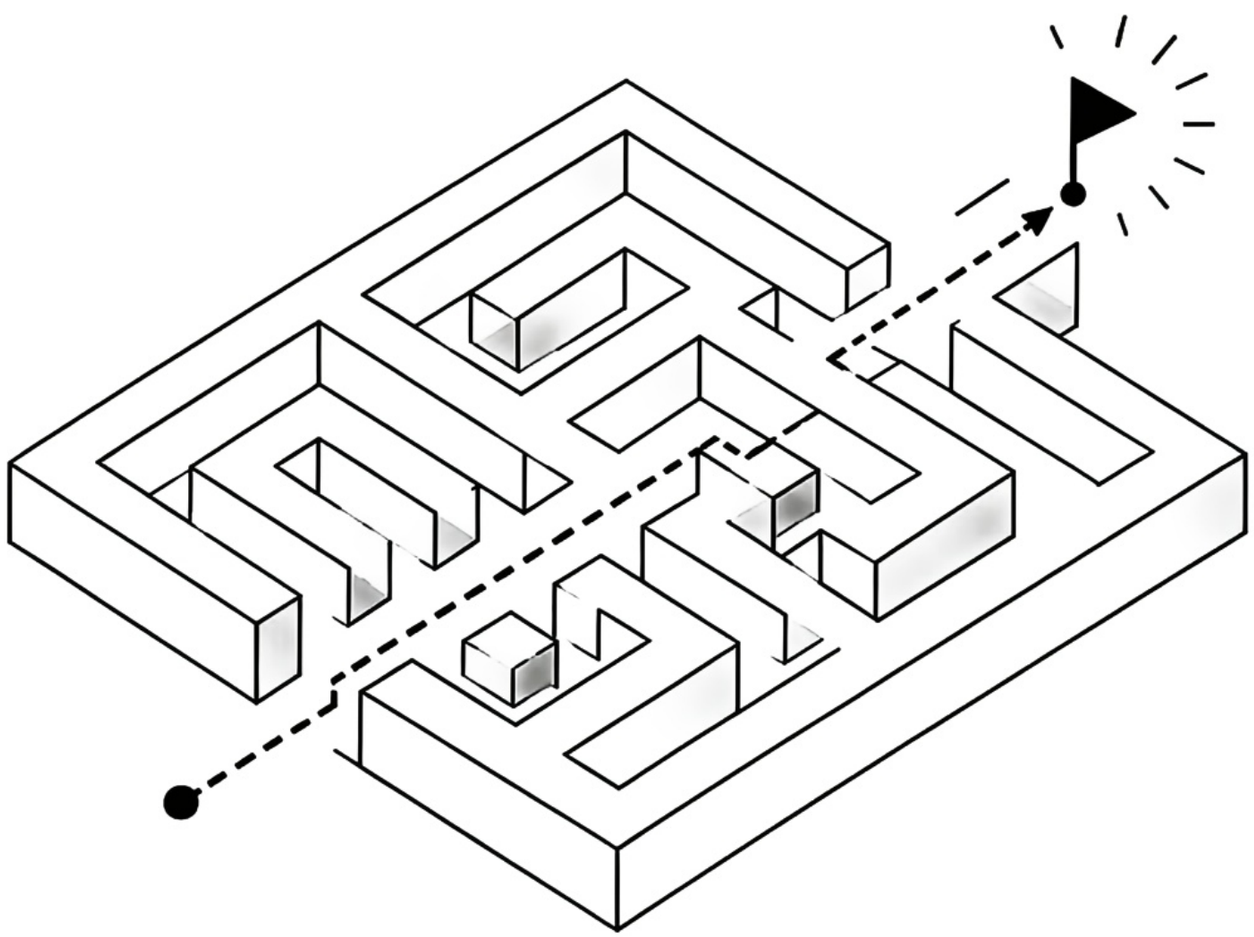
大观严选

数二高数



不重不漏 • 科学刺激

大观高数严选题 序言

百天冲刺之际，我看到很多同学因为做常规习题册或大观进度推不动，或者前期用力过猛但后期遗忘严重的情况。为了满足大家最后阶段的冲刺需求，我日日夜夜逐题精挑细选，在保证题量最少的情况下，帮大家严选出来了这套不重不漏的题库。

你可以输很多次，但一定要赢最重要的一次

严选题是基于大观分类框架下的最精简题库，题目主要以真题为主，含金量拉满

内容上，本严选题包含了真题从 87 到 26 年数学一二三所有的精华，相较于其他真题分类的区别就是分类更加清晰，更加精简，题目更少，保证题型不重不漏，全是必做必会的题型。注意：数学一和数学三含级数部分和各自专项部分，数学二仅有高数公共部分。高数严选题不包含线面、概率论、线代和证明，后续单独出专题。

数量上，数学一（含级数）共 **767** 题，数学二共 **613** 题，数学三（含级数） 共 **700** 题。

使用上，用法的话无论任何人这上面的每个题必须熟练掌握，这上面得题目几乎都是真题，是老头命制题目的重要题源。不管是什么目标的都不要眼高手低，一定要把严选题挨个过一遍。基础不好的最好完整的自己做一遍，基础好的可以 过目把不熟悉的打勾做一下。现阶段时间紧任务重，先把严选题抓住了，学有余 力再补充其他题目。可以先把严选题做了，然后开真题 21-26 本卷种套卷。后面 可以选择性做优质模拟卷（李林/张四等）。再做套卷的时候严格卡时间模拟，通 过套卷查缺，返回完整题库补漏。

学习顺序推荐：

1：积分计算➡ 反常积分➡ 积分应用➡ 二重积分➡ 微分方程（以积分计算串联其中，这一流程数字二占比很高）

2：极限➡ 一元微分➡ 多元微分

数一同学高数公共部分考察不会太难，拿分抢分最重要

在考前，没有任何一张试卷能衡量你的实力，唯有苦练扎实功底——不断提升对真题题型的熟练度和计算准确度。唯有扎实的功底，才能在考场上从从容容游刃有余。

继续训练，祝各位 27 考研数学取得满意成绩，顺利上岸

——2026 年 9 月

澄潇宇 南门朔 虎虎

数学二	2026	2025	2024	2023	2022	2021	平均
函数极限连续	10	5	10	10	15	15	10.8
一元微分	31	32	19	25	20	43	28.3
一元积分	23	25	29	32	26	22	26.2
证明题	0	12	12	12	12	0	8
微分方程	17	10	11	10	11	11	11.7
高数上	81	84	81	89	84	91	85
多元微分	22	17	22	17	17	10	17.5
二重积分	15	17	15	12	17	17	15.5
高数下	37	34	37	29	34	27	33
行列式	0	0	0	0	0	5	0.8
矩阵	16	5	10	8	5	5	8.2
向量	6	0	5	5	5	0	3.5
方程组	0	10	6	8	5	5	5.7
特征	5	15	5	6	5	12	8
二次型	5	2	6	5	12	5	5.8
线代	32	32	32	32	32	32	32

一、函数极限连续

1.1.1.函数性质

a.a.a.a) 有界

(1.1.1.1.1)2004 数三

(7) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界 (　).

A. $(-1,0)$.　　B. $(0,1)$.　　C. $(1,2)$.　　D. $(2,3)$.

***a.a.a.b*) 奇偶**

(1.1.1.2.1)2002 数二; 基础严选第五章选择 9;660 数二 325

(2) 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是 (　).

A. $\int_0^x f(t^2)dt$

B. $\int_0^x f^2(t)dt$

C. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$

D. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

(1.1.1.2.2)2020 数三

【例 3.34】(2020, 数三) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一阶连续导数, 则【　　】

A. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 为奇函数

B. $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$ 为偶函数

C. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 为奇函数

D. $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$ 为偶函数

(1.1.1.2.3)2024 数一

1.设 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}dt, g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}dt$, 则下列正确的是

A. $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数

B. $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数

C. $f(x), g(x)$ 均为奇函数

D. $f(x), g(x)$ 均为周期函数

***a.a.a.c*) 周期**

(1.1.1.3.1)2008 数一

设函数 $f(x)$ 是连续函数

(I) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 可导, 且 $F'(x)=f(x)$;

(II) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时, 证明 $G(x)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

***a.a.a.d*) 综合**

(1.1.1.4.1)1987 数二;880 第一章基础选择 1

【1】函数 $f(x)=|x\sin x|\mathrm{e}^{\cos x},x\in(-\infty,+\infty)$, 是 (　).

A. 单调函数　　B. 周期函数　　C. 偶函数　　D. 有界函数

1.1.2.极限

a.a.b.a) 函数极限计算

(1.1.2.1.1)0/0

i.i.*ii*.i.i.i.)1992 数一

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

i.i.*ii*.i.i.*ii*)1999 数二

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

i. i. *ii*. i. i. *iii*)2002 数二

(3) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=e^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时, 函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限 (　).

A. 不存在　　B. 等于 1　　C. 等于 2　　D. 等于 3

i. i. *ii*. i. i. *iv*)2008 数一二;26 版 660 数一二三第 129 题

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

i.i.*ii*.i.i.*v*)2008 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

i. i. *ii*. i. i. *vi*)2011 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

i. i. *ii*. i. i. *vii*)2009 数三

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=_____.$$

i. i. *ii*. i. i. *viii*)2012 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

i. i. *ii*. i. i. *ix*)2014 数二

(5) 设函数$f(x)=\arctan x$.若$f(x)=xf'(\xi)$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$(　)

A. 1.　　B. $\dfrac{2}{3}$.　　C. $\dfrac{1}{2}$.　　D. $\dfrac{1}{3}$.

i.i.*ii*.i.i.*x*)2015 数一三

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$_____.

i.i.*ii*.i.i.11)2025 数一

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=_____.$$

(1.1.2.1.2)∞/∞

i.i.*ii*.i.*ii*.i)1991 数二

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=_____.$$

i. i. *ii*. i. *ii*. *ii*. *ii*)1997 数二

求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

i. i. *ii*. i. *ii*. *iii*. *iii*)2007 数三

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$_____.

(1.1.2.1.3)$0^{\infty}\infty$

i. i. *ii*. i.*ii*.i)1996 数二

$\lim\limits_{x\to\infty}x\left\{\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]-\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\right\}=$_____.

i.i.*ii*.i.*iii*.*ii*)2018 数二

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$_____

i. i. *ii*. i.*iii*.*iii*)2023 数三

11. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)=$_____

i.i.*ii*.i.*iii*.*iv*)2026 数三

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)=$_____

(1.1.2.1.4)∞-∞

i. i. *ii*. i. *iv*. i)1990 数三

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$_____.

i. i. *ii*. i. i.*v. ii*)2020 数一

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{e^{x}-1}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right]=_____.$$

(1.1.2.1.5)0 的 0 次或∞的 0 次

i. i. *ii*.i.*v*.i)1988 数二

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$_____.

i. i. *ii*. i. *v*. *ii*)2010 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

(1.1.2.1.6)1 的 ∞

i.i.*ii*.i.*vi*.i)1991 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 n 是给定的自然数.

i. i. *ii*. i. *vi*. *ii*)2002 数三;880 第一章综合填空 6

设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n = _____$.

i. i. *ii*. i. *vi*.*iii*)2010 数一

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$ (　　)

A. 1.　　B. e.　　C. e^{a-b}.　　D. e^{b-a}.

i. i. *ii*. i. *vi*.*iv*)2011 数一

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

i. i. *ii*.i.i.*v*.)2012 数三

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$_____.

i. i. *ii*. i. *vi*. *vi*)2016 数二三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

i. i. *ii*. i. *vi*.*vii*)2019 数二

9. $\lim\limits_{x\to 0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$_____

i.i.*ii*.i.*vi*.*viii*)2019 数三

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]^n=_____.$$

i.i.*ii*.i.*vi*.*ix*)2022 数二三

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^{x}}{2}\right)^{\cot x}=$_____.

(1.1.2.1.7) 含 e 或绝对值的极限

i. i. *ii*. i.*vii*. i)2000 数一

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

(1.1.2.1.8) 利用导数定义求极限

i. i.*ii*.i.*viii*.i) 除式

(*a.a.b.a.h.a.a*)1994 数三

已知$f'(x_0)=-1$, 则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$_____.

(*a.a.b.a.h.a.b*)2011 数二三

(2) 设函数$f(x)$在$x=0$处可导, 且$f(0)=0$, 则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$(　)

A. $-2f'(0)$.　　B. $-f'(0)$.　　C. $f'(0)$.　　D. 0.

i. i. *ii*. i. *viii*. *ii*) 乘式

(*a*.*a*.*b*.*a*.*h*.*b*.*a*)2013 数一

设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)=$_____.

(*a.a.b.a.h.b.b*)2013 数三

设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$

(*a.a.b.a.h.b.c*)2024 数二

2.已知 $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=\mathrm{e}^{t^2}\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)-f(2)\right]=$(　)

A. $2\mathrm{e}$　　B. $\dfrac{4}{3}\mathrm{e}$　　C. $\dfrac{2}{3}\mathrm{e}$　　D. $\dfrac{\mathrm{e}}{3}$

(1.1.2.1.9) 含变限积分的极限

i. i. *ii*. i. i.*x*. i)*x* 趋于 0

(*a*.*a*.*b*.*a*.i.*a*.*a*)2002 数三;880 第三章基础填空 9

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$

(*a*.*a*.*b*.*a*.i.*a*.*b*)2017 数二三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x \sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

(*a*.*a*.*b*.*a*.i.*a*.*c*)2016 数一

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=_____$$

(*a*.*a*.*b*.*a*.i.*a*.*d*)2021 数一二

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}dt}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

i.i.*ii*.i.i.*ix*.*ii*)x趋于∞

(a.a.b.a.i.b.a)2000 数二

设函数$S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$.

(1) 当n为正整数, 且$n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$时, 证明:$2n\leqslant S(x)<2(n+1)$

(2) 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

(*a*.*a*.*b*.*a*.i.*b*.*b*)2014 数一二三

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]dt}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

(1.1.2.1.10) 其他

i. i. *ii*. i. *x*. i)1991 数三

(1) 下列各式中正确的是 (　)

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　　C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

i.i.*ii*.i.*x*.*ii*)2000 数三

(1) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　)

A. 存在且等于零

B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在

D. 不一定存在

i. i. *ii*. i. *x*. *iii*)2006 数三

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$_____.

a.a.b.b) 数列极限

(1.1.2.2.1) 数列极限计算

i.i.*ii*.*ii*.i.i) 数列以含 *n* 积分形式给出求极限

(*a.a.b.b.a.a.a*)2003 数二;880 综合填空 5

设 $a_n=\dfrac{3}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{n}{n+1}} x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=$_____.

$(a.a.b.b.a.a.b)$2009 数二

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=$_____.

i. i. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*) 定积分定义求 *n* 项和极限

(*a*.*a*.*b*.*b*.*a*.*b*.*a*)1998 数一

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

(*a.a.b.b.a.b.b*) 同济大学 2011;2012 数二

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{1+n^2}+\frac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n^2}\right)=$$

(*a.a.b.b.a.b.c*)2017 数一二三

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

(*a.a.b.b.a.b.d*)2021 数一二

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ (　　).

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{2n}$

B. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{2k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k-1}{2n}\right)\dfrac{1}{n}$

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n} f\left(\dfrac{k}{2n}\right)\dfrac{2}{n}$

(*a.a.b.b.a.b.*e)2025 数二

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln\dfrac{1}{n}+2\ln\dfrac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\dfrac{n-1}{n}\right]=$_____.

i.i.*ii*.*ii*.*ii*.*iii*) 二重积分定义求 *n* 项和极限

(*a*.*a*.*b*.*b*.*a*.*c*.*a*)2010 数一

(4)$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+\mathrm{i})(n^2+j^2)}=$(　)

A. $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$

B. $\int_0^1 dx\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y.$

C. $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y.$

D. $\int_0^1 dx\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$

(*a.a.b.b.a.c.b*)2026 数二

7. $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上连续, 且 $f(x,y)=f(y,x)$, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　)

A. $2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=n+1-i}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n^2}$

B. $\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n}f\left(\frac{i}{n},\frac{j}{n}\right)\frac{1}{n^2}$

C. $2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{2n+1-i}f\left(\frac{i}{2n},\frac{j}{2n}\right)\frac{1}{n^2}$

D. $\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{2n}\sum\limits_{j=1}^{i}f\left(\frac{i}{2n},\frac{j}{2n}\right)\frac{1}{n^2}$

(1.1.2.2.2) 概念题

i. i. *ii. ii. ii. ii.* i)2012 数二

(3) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 (　)

A. 充分必要条件.

B. 充分非必要条件.

C. 必要非充分条件.

D. 既非充分也非必要条件.

i.i.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*)2014 数三

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有 (　)

A. $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$.　　B. $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$.　　C. $a_n>a-\dfrac{1}{n}$.　　D. $a_n<a+\dfrac{1}{n}$.

i. i. *ii*. *ii*. *ii*. *iii*. *iii*)2015 数三;880 基础解答 4

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列.下列命题中不正确的是 (　)

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(1.1.2.2.3) 数列收敛发散问题

i.i.*ii*.*ii*.*ii*.i)2007 数一二

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是 (　)

A. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

B. 若 $u_1>u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

C. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必收敛.

D. 若 $u_1<u_2$, 则 $\{u_n\}$ 必发散.

i.i.*ii*.*ii*.*iii*.*ii*)2008 数一二

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是 (　)

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

B. 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

i.i.*ii.ii. iii.iii*)2017 数二

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sqrt{|x_n|}\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+x_n^2\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n+\sin x_n\right)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

i. i. *ii*. *ii*. *ii*. *iv*)2022 数一二

(6) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$，则 (　)

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

i.i.*ii.ii.ii.vi*)2024 数二

4.已知数列 $\{a_n\}(a_n\neq 0)$, 若 $\{a_n\}$ 发散，则 (　).

A. $\left\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散　　B. $\left\{a_n-\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散　　C. $\left\{\mathrm{e}^{a_n}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a_n}}\right\}$ 发散　　D. $\left\{\mathrm{e}^{a_n}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^{a_n}}\right\}$ 发散

(1.1.2.2.4) 数列极限最值

i. i. *ii*. *ii*. *iv*. i)2022 数三

(2) 已知 $a_n=\sqrt[n]{n}-\dfrac{(-1)^n}{n}(n=1,2,\cdots)$，则 $\{a_n\}$(　　)

A. 有最大值,有最小值.

B. 有最大值, 没有最小值.

C. 没有最大值, 有最小值.

D. 没有最大值, 没有最小值.

(1.1.2.2.5) 数列无穷小比阶

i. i. *ii*. *ii*. *vi*. i)2023 数二;26 版 1000 第二章强化 6

3.已知 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足:$x_1=y_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=\sin x_n,y_{n+1}=y_n^2(n=1,2,\cdots)$, 则当 $n\to\infty$ 时,(　)

A. x_n 是 y_n 的高阶无穷小

B. y_n 是 x_n 的高阶无穷小

C. x_n 与 y_n 是等价无穷小

D. x_n 与 y_n 是同阶但不等价的无穷小

(1.1.2.2.6) 单调有界

i. i. *ii*. *ii*. *vi*. i)1996 数一

设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

i. i. *ii*. *ii*. *vi*. *ii*)1999 数二;880 第三章综合解答 54

设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数, $a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x (n = 1,2,\cdots)$,证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

i. i. *ii*. *ii*. *vi*.*iii*)2002 数二

设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\ (n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

i. i. *ii*. *ii*. *vi*.*iv*)2006 数一二;880 第一章综合解答 14

【14】设 $0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n$.

(*I*) 证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求值;

(*II*) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

i. i. *ii*. *ii*. *vi*. *v*)2011 数一二;880 综合解答 15

(*I*) 证明对任意的正整数 n, 都有 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 成立;

(*II*) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

i. i. *ii*. *ii*. *vi*.*vi*)2013 数二

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(I) 求 $f(x)$ 的最小值;

(II) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在, 并求此极限.

i. i. *ii*. *ii*. *vi*.*vii*)2018 数一二三

数列 $\{x_n\}$ 满足:$x_1>0, x_n e^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1(n=1,2,\cdots)$.证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. *a*.*a*.*b*.*c*) 已知极限相关.

a.a.b.c) 已知极限相关

(1.1.2.3.1) 已知极限 (存在) 确定参数

i. i. *ii*. *iii*. *ii*. i)1998 数二

确定常数 a,b,c 的值, 使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c(c\neq 0)$.

i. i. *ii*. *iii*. *ii*. *ii*)2001 数三;880 第二章综合填空 5

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$, 求 c 的值.

i. i. *ii*. *iii*. i.*iii*)2010 数三

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^{x}\right]=1$，则 a 等于 (　)

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

i. i. *ii*. *iii*. *ii*. *iv*)2011 数二

已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)dt}{x^\alpha}$.设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=0$, 试求 α 的取值范围.

i. i. *ii*.*iii*.i.*v*)2013 数一

(1) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则 (　)

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　B. $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　　C. $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　D. $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

i. i. *ii*. *iii*. *ii*. *vi*)2018 数一

若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$, 则 $k=$_____.

i. i. *ii*. *iii*. *ii*. *vii*)2018 数三

已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$, 求 a,b.

i. i. *ii*. *iii*. *ii*. *viii*)2024 数一

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$_____.

i. i. *ii*. *iii*.*ii*.i.*ix*)2021 数三

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在, 求 a 的值.

(1.1.2.3.2) 已知一极限, 求另一极限

i. i. *ii*.*ii*.*ii*.ii. i)2000 数二

(4) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为 (　　).

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

i. i. *ii.iii.ii.ii.*)2016 数三

已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ _____.

i. i. *ii*. *iii*. *ii*. *iii*. *iii*)2020 数三

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$(　).

A. $b\sin a$　　B. $b\cos a$　　C. $b\sin f(a)$　　D. $b\cos f(a)$

(1.1.2.3.3) 已知极限推其他

i. i. *ii*. *iii*. *iii*. i)2022 数一

(1) 已知$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$, 则 (　)

A. $f(1)=0$.　　B. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.　　C. $f'(1)=1$.　　D. $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$.

***a.a.b.d*) 以极限形式给出的函数**

(1.1.2.4.1)2015 数二

(2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-0,\ +\infty)$ 内 (　)

A. 连续.　　B. 有可去间断点.　　C. 有跳跃间断点.　　D. 有无穷间断点.

(1.1.2.4.2)2024 数三

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}$, 则 $f(x)$

A. 在 $x=1,x=-1$ 处都连续.

B. 在 $x=1$ 处连续, 在 $x=-1$ 处不连续.

C. 在 $x=1,x=-1$ 处都不连续.

D. 在 $x=1$ 处不连续, 在 $x=-1$ 处连续.

*a.a.b.*e) 无穷小阶数

(1.1.2.5.1) 无穷小

i.i.*ii.v.*i.i) 无穷小概念题

(*a.a.b.*e.*a.a.a*)2013 数三

(1) 当 $x\to 0$ 时, 用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小量, 则下列式子中错误的是 (　)

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

B. $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.

D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

(*a.a.b.*e.*a.a.b*)2022 数二三

(1) 若当$x\to 0$时，$\alpha(x)$，$\beta(x)$是非零无穷小量，则以下的命题中

①若$\alpha(x)\sim\beta(x)$, 则$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$;　　②若$\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$, 则$\alpha(x)\sim\beta(x)$;

③若$\alpha(x)\sim\beta(x)$, 则$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$;　　④若$\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$, 则$\alpha(x)\sim\beta(x)$,

真命题的序号为(　)

A. ①③.　　B. ①④.　　C. ①③④.　　D. ②③④.

(*a.a.b*.e.*a.a.c*)2025 数二

4.设函数 $f(x),g(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域内有定义且恒不为 0, 若 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时 (　)

A. $f(x)+g(x)=o(g(x))$.

B. $f(x)g(x)=o\left(f^2(x)\right)$.

C. $f(x)=o\left(\mathrm{e}^{g(x)}-1\right)$.

D. $f(x)=o\left(g^2(x)\right)$.

i.i.*ii*.*v*.i.*ii*) 无穷小比阶

(*a*.*a*.*b*.e.*a*.*b*.*a*)2013 数二

(1) 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 (　)

A. 比 x 高阶的无穷小量.

B. 比 x 低阶的无穷小量.

C. 与 x 同阶但不等价的无穷小量.

D. 与 x 等价的无穷小量.

(*a.a.b.*e.*a.b.b*)2016 数二

(1) 设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1),\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}),\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$.当 $x\to0^+$ 时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 (　)

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.　　B. $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$.　　C. $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$.　　D. $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$.

(*a.a.b*.e.*a.b.c*)2020 数一二

1.当 $x\to 0^+$ 时，下列无穷小中最高阶的是(　)

A. $\int_0^x\left(\mathrm{e}^{t^2}-1\right)dt.$　　B. $\int_0^x\ln\left(1+\sqrt{t^3}\right)dt.$　　C. $\int_0^{\sin x}\sin t^2dt.$　　D. $\int_0^{1-\cos x}\sqrt{\sin^3 t}dt.$

i.i.*ii*.*v*.i.*iii*) 确定参数或阶数

(*a*.*a*.*b*.e.*a*.*c*.*a*) 已知高阶

i. i. *ii*.*v*. i.*iii*.i.i)2006 数二

试确定 A,B,C 的值, 使得 $\mathrm{e}^{x}\left(1+Bx+Cx^{2}\right)=1+Ax+o\left(x^{3}\right)$, 其中 $o\left(x^{3}\right)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^{3} 高阶的无穷小.

i.i.*ii*.*v*.i.*iii*.i.*ii*)2014 数二

(1) 当 $x\to 0^+$ 时, 若 $\ln^{\alpha}(1+2x),(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量, 则 α 的取值范围是 (　)

A. $(2,+\infty)$.　　B. $(1,2)$.　　C. $\left(\frac{1}{2},1\right)$.　　D. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

(*a.a.b.*e.*a.c.b*) 已知同阶

i. i. *ii.v.* i.*iii.ii.*i)1996 数一

(4) 设 $f(x)$ 有连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于 (　)

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

i.i. *ii*.*v*.i.*iii*.*ii*.*ii*)2019 数一二三

(1) 当 $x \to 0$ 时, 若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k =$ (　)

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

i.i. *ii*.*v*.i.*iii*.*ii*.*iii*.2024 数三

当 $x\to 0$ 时, $\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos^2 t}dt$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 $k=$_____.

(*a.a.b.*e.*a.c.c*) 已知等价

i. i. *ii.v.* i.*iii.iii.*i)2013 数二三

当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量, 求 n 与 a 的值.

i. i. *ii*.*v*.i.*iii*.*iii*.*ii*)2015 数一二三

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$.若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 时是等价无穷小,求 a,b,k 的值.

i.i.*ii.v.* i.*iii.iii.iii*)2020 数三

已知 a,b 为常数，若 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\frac{b}{n^a}$ 在 $n\to\infty$ 时是等价无穷小，求 a,b.

i. i. *ii*. *v*. i.*iii*.*iii*.*iv*)2023 数一二

当 $x\to 0$ 时, 函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=\mathrm{e}^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小, 则 $ab=$_____.

i. i.*ii*.*v*.i.*iii*.*iii*.*v*)2026 数二

已知当 $x\to 0$ 时, $ax^2+bx+\arcsin x$ 与 $\sqrt[3]{1+x^2}-1$ 是等价无穷小, 则 (　)

A. $a=\dfrac{1}{3},b=-1$　　B. $a=\dfrac{1}{3},b=1$　　C. $a=\dfrac{2}{3},b=-1$　　D. $a=\dfrac{2}{3},b=1$

(1.1.2.5.2) 无穷大

i.i.*ii*.*v*.*ii*.i) 无界与无穷大

(*a*.*a*.*b*.e.*b*.*a*.*a*)1993 数二;880 第一章基础选择 5

【5】当 $x\to 0$ 时, $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是 (　).

A. 无穷大　　B. 无穷小　　C. 有界但非无穷小　　D. 无界但非无穷大

i. i. *ii.v.ii.ii*) 无穷大比阶

(*a.a.b.*e.*b.b.a*)2010 数三

(4) 设 $f(x)=\ln^{10}x, g(x)=x, h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有 (　)

A. $g(x)<h(x)<f(x)$.　　B. $h(x)<g(x)<f(x)$.

C. $f(x)<g(x)<h(x)$.　　D. $g(x)<f(x)<h(x)$.

1.1.3.连续

a.a.c.a) 已知连续确定参数

(1.1.3.1.1)2018 数二

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}, g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\leqslant -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 R 上连续, 则 (　)

A. $a=3,b=1.$　　B. $a=3,b=2.$　　C. $a=-3,b=1.$　　D. $a=-3,b=2.$

(1.1.3.1.2)2017 数一二三

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 (　)

A. $ab=\dfrac{1}{2}$.　　B. $ab=-\dfrac{1}{2}$.　　C. $ab=0$.　　D. $ab=2$.

***a.a.c.b*) 间断点**

(1.1.3.2.1)2010 数二

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为(　)

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

(1.1.3.2.2)2013 数三;26 版 1000 第一章基础 21

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 (　)

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

(1.1.3.2.3)2020数二三

2.函数$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$的第二类间断点的个数为(　)

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

(1.1.3.2.4)2024 数二

1.函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数为(　)

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

二、一元微分

1.2.1.导数概念

a.b.a.a) 基本概念题

(1.2.1.1.1)1993 数二;880 第二章基础选择 9

(5) 若 $f(x)=-f(-x)$, 在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内 (　)

A. $f'(x)<0, f''(x)<0$

B. $f'(x)<0, f''(x)>0$.

C. $f'(x)>0, f''(x)<0$.

D. $f'(x)>0, f''(x)>0$.

(1.2.1.1.2)2015 数一三

(*I*) 设函数 $u(x),v(x)$ 可导, 利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(*II*) 设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导, $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

***a.b.a.b*)微分概念**

(1.2.1.2.1)1988 数一二;880 第二章基础选择 8

(3) 若函数 $y=f(x)$，有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 (　)

A. 与 Δx 等价的无穷小.

B. 与 Δx 同阶的无穷小.

C. 比 Δx 低阶的无穷小.

D. 比 Δx 高阶的无穷小.

(1.2.1.2.2)2006 数一二三

(7) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0, f''(x)>0, \Delta x$ 为自变量 x 在 x_0 处的增量， Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分, 若 $\Delta x>0$, 则 (　)

A. $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　　B. $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.　　C. $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　　D. $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

a.b.a.c) 极限与导数

(1.2.1.3.1) 已知极限求导数

i. *ii*. i. *iii*.i. i)2022 数二

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$, 求 $f'(1)$.

i. *ii*. i. *iii*. i. *ii*)2025 数二

18. (本题满分 12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\mathrm{e}^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$.证明:$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

(1.2.1.3.2) 已知极限推极值拐点

i.*ii*.i.*iii*.*ii*.i)1987 数一

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处 (　)

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$.

B. $f(x)$ 取得极大值.

C. $f(x)$ 取得极小值.

D. $f(x)$ 的导数不存在.

i.*ii*.i.*iii*.*ii*.*ii*)1990 数一;880 第二章基础选择 11

【11】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续,$f(0)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (　).

A. 不可导　　B. 可导且 $f'(0)\neq 0$　　C. 有极小值　　D. 有极大值

i. *ii*. i. *iii*. *ii*. *iii*)1996 数一

(2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则 (　)

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

i. *ii*. i. *iii*. *ii*. *iv*)2001 数三

(1) 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续, 又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$, 则 (　)

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

C. $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(1.2.1.3.3) 极限存在与导数存在

i. *ii*. i. *iii*. *iii*. *ii*)2001 数一

(3) 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为(　)

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在.

B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f\left(1-\mathrm{e}^{h}\right)$ 存在.

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在.

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

i.*ii*.i.*ii*.*iii*.*ii*)1989 数二

(6) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是 (　)

A. $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在.

B. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在.

C. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在.

D. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

i.*ii*.i.*iii*.*iii*.*iii*)2025 数二;26 版 1000 第三章强化 24

7.设函数 $f(x)$ 连续，给出下列 4 个条件:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在;　　② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在;

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}$ 存在;　　④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在.

其中可得到“$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件个数为(　)

A. 1.　　B. 2.　　C. 3.　　D. 4.

i. *ii.* i.*iii.iv.* i)1996 数二;880 第二章综合选择 13

(3) 设 $f(x)$ 处处可导，则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

B. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

i. *ii*. i. *iii*.*iv*. *ii*)2002 数一二

(3) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.　　B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

C. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时, 必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.　　D. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ 存在时, 必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$.

i. *ii*. i. *iii*.*iv*.*iii*)2025 数一

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导, 则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时, $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在.

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在时, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在.

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x}$ 存在.

i. *ii*. i. *iii*.*iv*.*iv*)2007 数一二三

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，以下命题错误的选项是 (　)

A.假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$

B.假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.

B.假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在

D.假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

i. *ii*. i. *iii*.*iv*.*v*)2020 数一

2 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$，则 (　　)

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.　　B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$.　　D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

i. *ii*. i. *iii*.*iv*.*vi*)2024 数一

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$, 则

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$ 时, $f'(0)=m$.

B. 当 $f'(0)=m$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$.

C. 当 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$ 时, $f'(0)=m$.

D. 当 $f'(0)=m$ 时, $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=m$.

a.b.a.d) 某点的可导问题

(1.2.1.4.1) 绝对值相关

i. *ii*. i. *iv*. i. i) f 与 $|f|$ 可导性的关系

(*a.b.a.d.a.a.a*)2000 数三

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是 (　)

A. $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$　　B. $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq 0$

C. $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$　　D. $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$

i.*ii*.i.*iv*.i.*ii*) 判断不可导点的个数

(*a*.*b*.*a*.*d*.*a*.*b*.*a*)1998 数一二

(2) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是 (　)

A. 3.　　B. 2.　　C. 1　　D. 0.

i.*ii*.i.*iv*.i.*iii*) 求可导的最高阶数

(*a*.*b*.*a*.*d*.*a*.*c*.*a*)1992 数一;26 版 1000 第四章强化 17

(4) 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为(　)

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

i.*ii*.i.*iv*. i.*iv*) 两个函数乘积

(*a*.*b*.*a*.*d*.*a*.*d*.*a*)1995 数一二;880 第二章基础选择 14

(3) 设 $f(x)$ 可导, $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$, 则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的 (　)

A. 充分必要条件.

B. 充分条件但非必要条件.

C. 必要条件但非充分条件.

D. 既非充分条件又非必要条件.

(1.2.1.4.2) 研究具体函数在某点的导数

i. ***ii.*** **i.*iv.ii*.i) 不分段函数**

(*a.b.a.d.b.a.a*)2018 数一二三;880 第二章基础选择 7

(2) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是 (　)

A. $f(x)=|x|\sin|x|$.　　B. $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.　　C. $f(x)=\cos|x|$.　　D. $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

i.*ii*.i.*iv*.*ii*.*ii*) 分段函数

(*a*.*b*.*a*.*d*.*b*.*b*.*a*) 连续,可导

i.*ii*.i.*iv*.*ii*.*ii*.i.i)1999 数一二;880 第二章基础选择 1

(2) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 (　)

A. 极限不存在.

B. 极限存在, 但不连续.

C. 连续, 但不可导.

D. 可导.

i.*ii*.i.*iv*.*ii*.*ii*.i.i.ii)2005 数一二

(7) 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内(　)

A. 处处可导.

B. 恰有一个不可导点.

C. 恰有两个不可导点.

D. 至少有三个不可导点.

i. *ii*. i. *iv*.*ii*.*ii*.ii.*iii*)2016 数一

(4) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots\end{cases}$, 则 (　)

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点　　B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导　　D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

i. *ii*. i. *iv*. *ii*. *ii*. *ii*. *iv*)2021 数一二三

(2) 函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处 (　).

A. 连续且取极大值　　B. 连续且取极小值.　　C. 可导且导数为零　　D. 可导且导数不为零

(*a.b.a.d.b.b.b*) 导函数连续

i. *ii*. i. *iv.ii.ii.ii.ii*.i1996 数三;25 版 660 数一二三第 148 题

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0)=1, g'(0)=-1$.

(1) 求 $f'(x)$; (2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

i. *ii*. i. *iv*. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*)2015 数二

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 (　)

A. $\alpha-\beta>1$.　　B. $0<\alpha-\beta\leqslant 1$.　　C. $\alpha-\beta>2$.　　D. $0<\alpha-\beta\leqslant 2$.

i.*ii*.i.*iv*.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*.*iii*. *iii*)2026 数二三

设函数 $g(x)$ 连续, $f(x)=\int_0^{x^2} g(xt)dt$, 求 $f'(x)$ 的表达式, 并讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

i.*ii*.i. *iv.ii.iii*) 含绝对值的参数方程

(*a*.*b*.*a*.*d*.*b*.*c*.*a*)2023 数一二

5.设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases}x=2t+|t|\\ y=|t|\sin t\end{cases}$ 确定，则 (　　).

A. $f(x)$ 连续,$f'(0)$ 不存在

B. $f'(0)$ 存在,$f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

C. $f'(x)$ 连续,$f''(0)$ 不存在

D. $f''(0)$ 存在,$f''(x)$ 在 $x=0$ 处不连续

(1.2.1.4.3) 研究抽象函数在某点的导数

i.*ii*.i.*iv*.*ii*.*ii*)1990 数三;26 版 660 数二第 522 题

(2) 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$, 且有 $f'(0)=b$, 其中 a,b 为非零常数,则 (　)

A. $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导

B. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=a$

C. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=b$

D. $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且 $f'(1)=ab$

i.*ii*.i.*iv*.*iii*.*ii*)1996 数二;880 第二章基础选择 18

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的(　)

A. 间断点.

B. 连续而不可导的点.

C. 可导的点, 且 $f'(0)=0$.

D. 可导的点, 且 $f'(0)\neq 0$.

1.2.2.导数计算

a.b.b.a) 乘积求导

(1.2.2.1.1)2012 数一二三

(2) 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^{x}-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$(　)

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　B. $(-1)^{n}(n-1)!$.　　C. $(-1)^{n-1}n!$.　　D. $(-1)^{n}n!$.

***a.b.b.b*) 复合函数求导**

(1.2.2.2.1)2012 数三

设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ $y=f(f(x))$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$_____.

(1.2.2.2.2)2021 数三

若 $y=\cos e^{-\sqrt{x}}$, 则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$ _____.

***a.b.b.c*) 隐函数求导**

(1.2.2.3.1)2007 数二

已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=1$, 函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^{y-1}=1$ 所确定, 设 $z=f(\ln y-\sin x)$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{d^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

(1.2.2.3.2)2010 数三

设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}dt=\int_0^x x\sin t^2 dt$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$_____.

(1.2.2.3.3)2022 数二

已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2+xy+y^3=3$ 确定, 则 $y''(1)=$_____

***a.b.b.d*) 反函数求导**

(1.2.2.4.1)2026 数二三

6.已知 $f(x)=\int_1^{x^3}\frac{e^t}{1+t^2}dt, g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数, 则 (　)

A. $g(0)=1, g'(0)=\frac{3}{2}e$

B. $g(0)=1, g'(0)=\frac{2}{3e}$

C. $g(1)=0, g'(0)=\frac{3}{2}e$

D. $g(1)=1, g'(0)=\frac{2}{3e}$

***a.b.b.*e) 参数方程求导**

(1.2.2.5.1)2020 数一二

9.设 $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+1}, \\ y=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right), \end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=1}=$_____.

(1.2.2.5.2)2021 数一二

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\mathrm{e}^{t}+t+1,\\ y=4(t-1)\mathrm{e}^{t}+t^{2}\end{cases}$ 所确定, 则 $\left.\dfrac{d^{2}y}{\mathrm{d}x^{2}}\right|_{t=0}=$ _____.

(1.2.2.5.3)2025 数二

已知函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\ln(1+2t)\\ 2t-\int_1^{y+t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=0\end{cases}$ 确定，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=0}=$_____.

(1.2.2.5.4)2026 数一

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2\sin^2 t\\ y=t+\cos t\end{cases}\left(t\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 确定, 则 $\left.\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$_____.

***a.b.b.f*) 幂指函数求导**

(1.2.2.6.1)2005 数二

设 $y=(1+\sin x)^x$, 则 $\mathrm{d}y\big|_{x=\pi}=$_____

a.b.b.g) 高阶导

(1.2.2.7.1) 明显奇偶性

i. *ii*. *ii*. *vii*. *vi*. i)2017 数一

设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0)=$_____.

i. *ii*. *ii*. *vii*. i. *ii*)2022 数三

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}$, 则 $f'''(2\pi)=$_____.

(1.2.2.7.2) 有理函数

i. *ii*. *ii*. *vii*. *ii*. i)1995 数三

设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$_____.

i. *ii. ii. vii. ii. ii*)2007 数二三

设 $f(x)=\dfrac{1}{2x+3}$，则 $f^{(n)}(0)=$_____.

(1.2.2.7.3) 对数相关

i. *ii*. *ii*. *vii*.*iii*. i)2010 数二;880 第二章基础选择 17

设 $f(x)=\ln(1-2x)$，则 $f^{(n)}(0)=$_____.

(1.2.2.7.4) 乘积高阶导

i. *ii*. *ii*. *vii*.*iv*.i)2020 数二

4.已知函数 $f(x)=x^2\ln(1-x)$.当 $n\geqslant 3$ 时，$f^{(n)}(0)=(\quad)$

A. $-\dfrac{n!}{n-2}$.　　B. $\dfrac{n!}{n-2}$.　　C. $-\dfrac{(n-2)!}{n}$.　　D. $\dfrac{(n-2)!}{n}$.

i. *ii*. *ii*. *vii*.*iv*.*ii*)2015 数二

函数 $f(x)=x^2 2^x$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)=$ _____.

i. *ii*. *ii*. *vii*.*ivi*.*iii*)2024 数二

已知函数 $f(x)=x^2(\mathrm{e}^x+1)$，则 $f^{(5)}(1)=$_____.

(1.2.2.7.5) 罕见函数

i. *ii*. *ii*. *vii*. *v*. i)2016 数一

设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$_____

(1.2.2.7.6) 变限积分

i. *ii*. *ii*. *vii*. *vi*. i)2016 数二

已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 且 $f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$, 则当 $n\geqslant 2$ 时, $f^{(n)}(0)=$_____.

(1.2.2.7.7) 有规律

i.*ii*.*ii*.*vii*.*vii*.i)1990 数一二;880 第二章基础选择 16

(3) 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 为 (　)

A. $n![f(x)]^{n+1}$.　　B. $n[f(x)]^{n+1}$.　　C. $[f(x)]^{2n}$.　　D. $n![f(x)]^{2n}$.

1.2.3.导数应用

a.b.c.a) 切法线

(1.2.3.1.1) 普通曲线

i. *ii.iii*.i.i.i)2004 数一;26 版 660 数一二三第 27 题

曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 _____

i. *ii*.*iii*.i.i.*ii*)2010 数二

(3) 曲线 $y=x^2$ 与曲线 $y=a\ln x(a\neq 0)$ 相切, 则 $a=$(　)

A. 4e.　　B. 3e.　　C. 2e.　　D. e.

i. *ii*. *iii*. i. i.*iii*)2018 数二三

曲线 $y=x^2+2\ln x$ 在其拐点处的切线方程是 _____

(1.2.3.1.2) 隐函数表示的曲线

i. *ii*.*iii*. i.*ii*.i)2020 数三

曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为 _____

i. *ii*. *iii*. i. *ii*. *ii*)2023 数二

14.曲线 $3x^3=y^5+2y^3$ 在 $x=1$ 对应点处的法线斜率为 _____

(1.2.3.1.3) 参数方程表示的曲线

i. *ii*.*iii*. i.*iii*. i)2009 数二

曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u, \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处的切线方程为 _____

i. *ii*.*iii*.i.*ii*.*ii*)2013 数二

曲线 $\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的法线方程为 _____

(1.2.3.1.4) 极坐标表示的曲线

i. *ii*.*iii*. i.*iv*.i)1997 数一

对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 _____

(1.2.3.1.5) 未给出表达式

i. *ii*. *iii*. i.*v*. i)2000 数二;26 版 660 数二第 459 题;880 第二章综合解答 3

已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数, 它在 $x=0$ 的某个领域内满足关系式 $f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$, 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小, 且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程.

***a.b.c.b*) 渐近线**

(1.2.3.2.1) 斜渐近线 (可提取)

i. *ii.iii.ii*.ii.i) 直接给出

(*a.b.c.b.a.a.a*)2014 数一二三

(2) 下列曲线中有渐近线的是 (　)

A. $y=x+\sin x$.　　B. $y=x^2+\sin x$.　　C. $y=x+\sin\frac{1}{x}$.　　D. $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$.

(*a.b.c.b.a.a.b*)2017 数二

曲线 $y=x\left(1+\arcsin\frac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为 _____

i. ***ii.iii.ii*****.ii.i.i) 有理分式**

(*a*.*b*.*c*.*b*.*a*.*b*.*a*)2005 数一

曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 _____

(*a.b.c.b.a.b.b*)2016 数二

曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)$ 的斜渐近线方程为 _____

i.*ii*.*iii*.*ii*.ii.*iii*) 含对数

(*a*.*b*.*c*.*b*.*a*.*c*.*a*)2007 数一二三

(5) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{x})$ 渐近线的条数为 (　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(*a.b.c.b.a.c.b*)2023 数一二

(1) 曲线$y=x\ln\left(\mathrm{e}+\dfrac{1}{x-1}\right)$的斜渐近线方程为(　)

A. $y=x+\mathrm{e}$.　　B. $y=x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.　　C. $y=x$.　　D. $y=x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

i.*ii*.*iii*.*ii*.i.*iv*) 含指数

(a.b.c.b.a.d.a)2000 数二

曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____

i.*ii*.*iii*.*ii*.i.*v*) 含根号

(*a*.*b*.*c*.*b*.*a*.e.*a*)2025 数二

曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 的渐近线方程为 _____.

(1.2.3.2.2) 含幂 / 指函数

i. *ii*. *iii*. *ii*. *ii*. i)1991 数一;880 第二章基础选择 23

(1) 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$(　)

A. 没有渐近线.

B. 仅有水平渐近线.

C. 仅有铅直渐近线.

D. 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

i. *ii.iii.ii.ii.ii.ii*)1994 数二三

(4) 曲线 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有 (　)

A. 1 条.　　B. 2 条.　　C. 3 条.　　D. 4 条.

i. *ii. iii. ii. ii. iii. iii*)2020 数二

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}(x>0)$ 的斜渐近线方程.

(1.2.3.2.3) 反函数

i. *ii. iii. ii. ii. ii*)2025 数三

设 $g(x)$ 是函数 $f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{3+x}{3-x}$ 的反函数，则曲线 $y=g(x)$ 的渐近线方程为 _____.

(1.2.3.2.4) 其他

i. *ii.iii.ii.iv.*i)1989 数一二

(1) 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$(　)

A. 有且仅有水平渐近线.

B. 有且仅有铅直渐近线.

C. 既有水平渐近线, 也有铅直渐近线.

D. 既无水平渐近线, 也无铅直渐近线.

i. *ii.iii.ii.iv.ii*)2005 数二

曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为 _____

i. *ii.iii.ii.iv.iii*)2012 数一二三

(1) 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为(　)

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

***a.b.c.c*) 曲率**

(1.2.3.3.1) 概念题

i. *ii*. *iii*. *iii*. i. i)2016 数二

(5) 设函数 $f_i(x)$(i=1,2) 具有二阶连续导数, 且 $f_i''(x_0)<0$(i=1,2).若两条曲线 $y=f_i(x)$(i=1,2) 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$, 且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率, 则在 x_0 的某个邻域内, 有 (　)

A. $f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant g(x)$.

B. $f_2(x)\leqslant f_1(x)\leqslant g(x)$.

C. $f_1(x)\leqslant g(x)\leqslant f_2(x)$.

D. $f_2(x)\leqslant g(x)\leqslant f_1(x)$.

i.*ii.iii.iii.ii.ii*)2019 数二

6.设函数 $f(x),g(x)$ 的 2 阶导函数在 $x=a$ 处连续, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-g(x)}{(x-a)^2}=0$ 是两条曲线 $y=f(x),y=g(x)$ 在 $x=a$ 对应的点处相切及曲率相等的 (　)

A. 充分不必要条件.

B. 充分必要条件.

C. 必要不充分条件.

D. 既不充分又不必要条件.

(1.2.3.3.2) 曲率圆

i. *ii.iii.iii.ii.*i)2009 数二

(5) 若 $f''(x)$ 不变号, 且曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的曲率圆为 $x^2+y^2=2$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 内 (　)

A. 有极值点, 无零点.

B. 无极值点,有零点.

C. 有极值点, 有零点.

D. 无极值点,无零点.

i. *ii. iii. iii. ii. ii. ii*)2024 数二

曲线 $y^2=x$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆方程为 _____.

(1.2.3.3.3) 曲率 (半径)

i. *ii.iii.iii.iii*.i)2014 数二

(4) 曲线 $\begin{cases} x=t^2+7, \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是 (　)

A. $\frac{\sqrt{10}}{50}$.　　B. $\frac{\sqrt{10}}{100}$.　　C. $10\sqrt{10}$.　　D. $5\sqrt{10}$.

i. *ii*. *iii*. *iii*. *iii*. *iii*. *ii*)2012 数二

曲线 $y=x^2+x(x<0)$ 上曲率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点的坐标是 _____

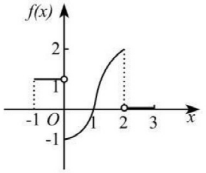
***a.b.c.d*) 极最拐**

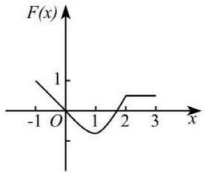
(1.2.3.4.1) 极值

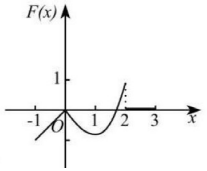
i.*ii.iii.iv*.i.i) 单调性

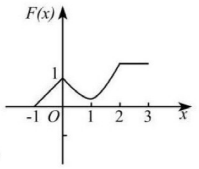
(*a.b.c.d.a.a.a*)2001 数一二

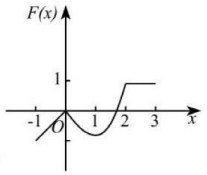
(5) 已知函数 $y=f(x)$ 在其定义域内可导, 它的图形如上图所示, 则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 (　　).



A. 

B. 

C. 

D. 

(*a.b.c.d.a.a.b*)2004 数一二;26 版 660 数一二三第 150 题;880 第二章基础选择 19

(8) 设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得 (　)

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$, 有 $f(x)>f(0)$.

D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$, 有 $f(x)>f(0)$.

(*a.b.c.d.a.a.c*)2022 数二

(3) 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处有二阶导数，则 (　)

A. 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时，$f'(x_0)>0$.

B. 当 $f'(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.

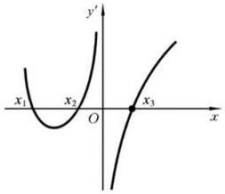
C. 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0)>0$.

D. 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

i.*ii*.*iii*.*iv*.i.*ii*) 极值概念题

(*a*.*b*.*c*.*d*.*a*.*b*.*a*)2003 数一二

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有 (　　).



A. 一个极小值点和两个极大值点　　B. 两个极小值点和一个极大值点

C. 两个极小值点和两个极大值点　　D. 三个极小值点和一个极大值点

(*a.b.c.d.a.b.b*)2010 数三

(3) 设函数$f(x),g(x)$具有二阶导数，且$g''(x)<0$.若$g(x_0)=a$是$g(x)$的极值，则$f(g(x))$在x_0处取极大值的一个充分条件是(　)

A. $f'(a)<0$.　　B. $f'(a)>0$.　　C. $f''(a)<0$.　　D. $f''(a)>0$.

i.*ii*.*iii*.*iv*.i.*iii*) 求极值

(*a*.*b*.*c*.*d*.*a*.*c*.*a*) 普通函数极值

i. *ii*. *iii*.*iv*.i.*iii*.i.i2005 数三;26 版 660 数二第 540 题

(10) 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是 (　)

A. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值.

B. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值.

C. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值.

D. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值.

(*a.b.c.d.a.c.b*) 分段函数极值

i. *ii.iii.iv.*i.*iii.ii.*i)2019 数一

(2) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x|x|, & x\leqslant 0,\\ x\ln x, & x>0,\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的 (　)

A. 可导点, 极值点.

B. 不可导点, 极值点.

C. 可导点, 非极值点.

D. 不可导点, 非极值点.

(*a.b.c.d.a.c.c*) 微分方程解的极值

i. *ii.iii.iv.*i.*iii.iii.*i)1994 数二

(3) 设 $y=f(x)$ 是满足微分方程 $y''+y'-\mathrm{e}^{\sin x}=0$ 的解，且 $f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在 (　)

A. x_0 某邻域内单调增加.

B. x_0 某邻域内单调减少.

C. x_0 处取得极小值.

D. x_0 处取得极大值.

(*a.b.c.d.a.c.d*) 隐函数极值

i. *ii.iii.iv.*i.*iii.iv.*i)2017 数一二

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定, 求 $y(x)$ 的极值.

i. *ii*.*iii*.*iv*.i.*iii*.*iv*.*ii*)2023 数三

已知可导函数 $y=y(x)$ 满足 $ae^x+y^2+y-\ln(1+x)\cos y+b=0$, 且 $y(0)=0, y'(0)=0$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 判断 $x=0$ 是否为 $y(x)$ 的极值点.

(*a.b.c.d.a.c.*e) 变限积分函数极值

i. *ii.iii.iv.*i.*iii.v.*i)2010 数一二

求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

(1.2.3.4.2) 最值

i. *ii.iii.iv.ii.* i) 普通函数

($a.b.c.d.b.a.a$)2009 数二

函数 $y=x^{2x}$ 在区间 $(0,1]$ 上的最小值为 _____

i. ***ii.iii.iv.ii.ii*) 以积分给出的函数最值**

(*a.b.c.d.b.b.a*)2016 数二三

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$, 求 $f'(x)$, 并求 $f(x)$ 的最小值.

(1.2.3.4.3) 拐点

i. *ii.iii.iv.iii.*i) 凹凸性

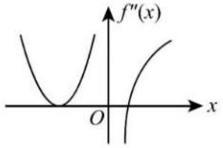
($a.b.c.d.c.a.a$)2021 数二

已知 $f(x)=\dfrac{x|x|}{1+x}$，求 $f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

i.*ii.iii.iv.iii.ii*) 拐点概念题

(*a.b.c.d.c.b.a*)2015 数一二三;880 第二章基础填空 5

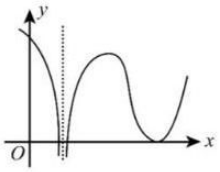
(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 (　)



A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

(*a.b.c.d.c.b.b*)2016 数二三

(1) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 (　)



A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点.

C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点.

D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点.

i.*ii.iii.iv.iii.iii*) 求拐点

(*a.b.c.d.c.c.a*)2019 数二三

曲线 $y=x\sin x+2\cos x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为 _____

i. ***ii.iii.iv.iii.iv*) 判断拐点**

(*a*.*b*.*c*.*d*.*c*.*d*.*a*)2004 数二三

(8) 设 $f(x)=|x(1-x)|$, 则 (　　).

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但点 $(0,0)$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

B. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且点 $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 点 $(0,0)$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(*a.b.c.d.c.d.b*)2025 数一二三

1.已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{t^2}\sin t dt, g(x)=\int_0^x e^{t^2}dt\cdot\sin^2 x$, 则 *A*. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 也是 $g(x)$ 的极值点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点, $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $(0,0)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点, 也是曲线 $y=g(x)$ 的拐点

i.*ii.iii.iv.iii.v*) 高次幂乘积拐点

(*a*.*b*.*c*.*d*.*c*.e.*a*)2001 数二;880 第二章基础选择 12

(3) 曲线 $y=(x-1)^2(x-3)^2$ 的拐点个数为(　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

(*a*.*b*.*c*.*d*.*c*.e.*b*)2011 数一

(1) 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是 (　)

A. $(1,0)$.　　B. $(2,0)$.　　C. $(3,0)$.　　D. $(4,0)$.

i.*ii.iii.iv.iii.vii.vi*) 微分方程解的拐点

(*a.b.c.d.c.f.a*)2000 数二

(2) 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+[f'(x)]^2=x$，且 $f'(0)=0$，则 (　)

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

C. 点 $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值, 点 $(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

i.*ii.iii.iv.iii.vii*) 参数方程凹凸性及拐点 (*a.b.c.d.c.g.a*)2011 数二

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 确定, 求函数 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

i.*ii.ii.iv.iii.viii.viii*) 已知拐点求参数

(*a.b.c.d.c.h.a*)2010 数三

若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$_____

(*a.b.c.d.c.h.b*)2023 数二

7.设函数 $f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$, 若 $f(x)$ 没有极值点, 但曲线 $y=f(x)$ 有拐点, 则 a 的取值范围是 (　).

A. $[0,1)$　　B. $[1,+\infty)$　　C. $[1,2)$　　D. $[2,+\infty)$

***a.b.c.*e) 方程根 / 曲线交点 / 函数零点**

(1.2.3.5.1)2011 数二

函数 $f(x)=\ln|(x-1)(x-2)(x-3)|$ 的驻点个数为(　)

A. 0.　　B. 1.　　C. 2.　　D. 3.

(1.2.3.5.2)2003 数二;880 第二章基础解答 36

讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数.

(1.2.3.5.3)2021 数二三

(3) 设函数 $f(x)=ax-b\ln x(a>0)$ 有两个零点，则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是 (　)

A. $(e,+\infty)$　　B. $(0,e)$　　C. $\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　D. $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

***a.b.c.f*) 不等式**

(1.2.3.6.1)2000 数一二;26 版 1000 第六章基础 17

(3) 设函数 $f(x),g(x)$ 是大于零的可导函数, 且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$, 则当 $a<x<b$ 时, 有 (　).

A. $f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　B. $f(x)g(a)>f(a)g(x)$

C. $f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　D. $f(x)g(x)>f(a)g(a)$

(1.2.3.6.2)2017 数一三

(2) 设函数$f(x)$可导, 且$f(x)f'(x)>0$, 则 (　)

A. $f(1)>f(-1)$.　　B. $f(1)<f(-1)$.　　C. $|f(1)|>|f(-1)|$.　　D. $|f(1)|<|f(-1)|$.

(1.2.3.6.3)2001 数二;880 第二章综合选择 1;25 版 660 数一二三第 173 题

(4) 已知函数$f(x)$在区间$(1-\delta,1+\delta)$内具有二阶导数，$f'(x)$严格单调减少，且$f(1)=f'(1)=1$，则(　).

A. 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有$f(x)<x$

B. 在$(1-\delta,1)$和$(1,1+\delta)$内均有$f(x)>x$

C. 在$(1-\delta,1)$内,$f(x)<x$,在$(1,1+\delta)$内,$f(x)>x$

D. 在$(1-\delta,1)$内,$f(x)>x$,在$(1,1+\delta)$内,$f(x)<x$

(1.2.3.6.4)2014 数一二三

(3) 设函数$f(x)$具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间$[0,1]$上(　)

A. 当$f'(x)\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant g(x)$.

B. 当$f'(x)\geqslant 0$时，$f(x)\leqslant g(x)$.

C. 当$f''(x)\geqslant 0$时，$f(x)\geqslant g(x)$.

D. 当$f''(x)\geqslant 0$时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(1.2.3.6.5)2017 数二

(2) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$，且 $f''(x)>0$，则 (　)

A. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x>0.$

B. $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x<0.$

C. $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x>\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$

D. $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x.$

(1.2.3.6.6)2018 数二三;26 版

(4) 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导, 且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 (　)

A. 当$f'(x)<0$时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

B. 当$f''(x)<0$时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

C. 当$f'(x)>0$时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

D. 当$f''(x)>0$时, $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$.

(1.2.3.6.7)2020 数二

6.设函数 $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上可导, 且 $f'(x)>f(x)>0$, 则 (　)

A. $\dfrac{f(-2)}{f(-1)}>1$.　　B. $\dfrac{f(0)}{f(-1)}>\mathrm{e}$.　　C. $\dfrac{f(1)}{f(-1)}<\mathrm{e}^2$.　　D. $\dfrac{f(2)}{f(-1)}<\mathrm{e}^3$.

***a.b.c.g*) 物理应用**

(1.2.3.7.1)2010 数二

(13) 已知一个长方形的长 l 以 2cm/s 的速率增加, 宽 w 以 3cm/s 的速率增加.则当 $l=12\text{cm}, w=5\text{cm}$ 时，它的对角线增加的速率为 _____

(1.2.3.7.2)2016 数二

(13) 已知动点 P 在曲线 $y=x^3$ 上运动，记坐标原点与点 P 间的距离为 l.若点 P 的横坐标对时间的变化率为常数 v_0，则当点 P 运动到点 $(1,1)$ 时，l 对时间的变化率是 _____

(1.2.3.7.3)2021 数二

(3) 有一圆柱体，底面半径与高随时间变化的速率分别为 2cm/s, -3cm/s，当底面半径为 10cm，高为 5cm 时，圆柱体的体积与表面积随时间变化的速率分别为 (　).

A. $125\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$

B. $125\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

C. $-100\pi cm^3/s, 40\pi cm^2/s$

D. $-100\pi cm^3/s, -40\pi cm^2/s$

1.2.4.泰勒多项式

a.b.d.a)2021 数一

(3) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则 (　)

A. $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$

B. $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

C. $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$

D. $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

a.b.d.b)2021 数二

(5) 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则 (　)

A. $a=1,b=-\frac{1}{2}$　　B. $a=1,b=\frac{1}{2}$　　C. $a=0,b=-\frac{1}{2}$　　D. $a=0,b=\frac{1}{2}$

三、一元积分

1.3.1.积分计算

a.c.a.a) 有理函数

(1.3.1.1.1) 分母质因式

i.*iii*.i.i.i.i) 分子常数

(*a.c.a.a.a.a.a*)2021 数一

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = _____.$$

i.*iii*.i.i.i.*ii*) 分子一次

(*a*.*c*.*a*.*a*.*a*.*b*.*a*)2022 数二

$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x = _____.$

(1.3.1.1.2) 分母可因式分解

i.*iii*.i.i.*ii*.i) 分母简单

(*a*.*c*.*a*.*a*.*b*.*a*.*a*)1992 数二; 李正元例 3.43 − 2

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+1\right)} = _____$$

(*a.c.a.a.b.a.b*)1993 数二

求 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^3}\mathrm{d}x.$

(*a.c.a.a.b.a.c*)2024 数三

$$\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4+3x^2-4}\,\mathrm{d}x = _____.$$

i.*iii*.i.i.*ii*.*ii*) 分母复杂

(*a*.*c*.*a*.*a*.*b*.*b*.*a*)2025 数一二三

计算 $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x^2-2x+2)}\mathrm{d}x.$

(*a.c.a.a.b.b.b*)2019 数二

计算积分 $\int \frac{3x+6}{(x-1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x.$

(1.3.1.1.3) 有理函数乘其他函数

i.*iii*.i.i.*ii*.i)1996 数二;880 基础解答 1 − 4

$$\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

a.c.a.b) 含根式

(1.3.1.2.1) 根号下一坨

i.*iii*.i.*ii*.i.i)2009 数二三;1000 第九章基础 3

计算不定积分 $\int \ln\left(1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)\mathrm{d}x(x>0)$.

(1.3.1.2.2) 根号 x

i.*iii*.i.*ii*.*ii*.i)1988 数三

求定积分 $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

i.*iii*.i.*ii*.*ii*.*ii*)1997 数二

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(4-x)}} = _____.$$

i.*iii*.i.*ii*.*ii*.*iii*)2011 数三

求不定积分 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

i.*iii*. i. *ii*. *ii*.*iv*)2020 数二;1000 第九章强化 15

3. $\int_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=(\quad)$

A. $\frac{\pi^2}{4}$.　　B. $\frac{\pi^2}{8}$.　　C. $\frac{\pi}{4}$.　　D. $\frac{\pi}{8}$.

(1.3.1.2.3) 分母多项式乘根号

i.*iii*. i.*ii*.*ii*.i)2000 数二;30 习题 9.6

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}} = _____.$$

(1.3.1.2.4) 根号下二次多项式

i.*iii*. i. *ii*.*iv*.i)1991 数一;660 数二 112;30 例 9.27

$$\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}} = _____.$$

i.*iii*. i.*ii*.*iv*.*ii*)2012 数一

$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$_____.

(1.3.1.2.5) 根号下绝对值

i.*iii*.i.*ii*.*v*.i)1998 数二;880 基础解答 9 − 2;30 例 9.26

计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

(1.3.1.2.6) 平方和差

i.*iii*.i.*ii*.*vi*.i)1992 数二;880 基础解答 2 − 3; 李正元例 3.40 − 1

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

i.*iii*. i. *ii*. *vi*. *ii*)2001 数二;880 基础解答 2 − 4

求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

i.*iii*. i. *ii*.*vi*.*iii*)2008 数二

计算积分 $\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x$.

i.*iii*. i. *ii*. *vi*.*iv*)2004 数二; 基础严选第五章填空 5

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = _____.$$

i.*iii*. i. *ii*.*vi*.*v*)2006 数二

反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} =$ _____.

i.*iii*. i. *ii*. *vi*.*vi*)1994 数二;880 基础解答 8 − 2

$$\int_0^1 x\left(1-x^4\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x$$

(1.3.1.2.7) 指数相关

i.*iii*. i. *ii*.*vii*. i)1993 数一;880 基础解答 2 − 2;30 例 9.4

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$$

i. *iii*. i. *ii*. *vii*. *ii*)1996 数三;660 数二 110; 李正元例 3.43 − 3

计算 $\int_0^{+\infty} \dfrac{xe^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

i.*iii*. i.*ii*.*vii*.*iii*)2000 数三

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}} = _____.$$

***a.c.a.c*) 两函数相乘**

(1.3.1.3.1) 多次分部

i.*iii*. i.*iii*. i.i)2010 数一

$\int_0^{\pi^2} \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = _____.$

i.*iii*. i.*iii*. i.*ii*)1991 数二

求 $\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.

(1.3.1.3.2) 反三角

i.*iii*. i.*iii*. *ii*. i)1987 数二

$$\int_0^1 x\arcsin x\mathrm{d}x$$

i.*iii*. i.*iii*. *ii*. *ii*. *ii*)2018 数一二;1000 第九章基础 4

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^{x}-1}\,\mathrm{d}x$.

i.*iii*. i.*iii*. *ii*.*iii*)2006 数二

计算积分 $\int \frac{\arcsin e^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

i.*iii*. i. *iii*. *ii*.*iv*)1999 数二;900 第三章数二 *A* 类 50

计算积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} \mathrm{d}x$.

(1.3.1.3.3) 指对有关

i.*iii*. i.*iii*.*iii*.i) 武老师基础严选第五章填空 4;2026 数一

14. $\int_1^{+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x^2}\mathrm{d}x = _____.$

i.*iii*. i.*iii*.*iii*.*ii*)2022 数一

$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = _____.$

1000 第八章强化 11

6.若函数 $f(\alpha)=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha=\alpha_0$ 处取得最小值，则 $\alpha_0=$(　).

A. $-\frac{1}{\ln(\ln 2)}$　　B. $-\ln(\ln 2)$　　C. $\frac{1}{\ln 2}$　　D. $\ln 2$

i.*iii*. i.*iii*.*iii*.*iv*)2007 数一

$\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^x dx = _____.$

i.*iii*. i.*iii*.*iii*.*v*)1997 数二;30 例 9.7;880 基础解答 4 − 6

计算 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2 dx$.

(1.3.1.3.4) 递推

i.*iii*. i.*iii*.*iv*.i)2019 数一三

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots)$.

(I) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}(n=2,3,\cdots)$;

(II) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

a.c.a.d) 三角相关

(1.3.1.4.1) 高次幂

i.*iii*. i.*iv*.i.i) 姜晓千基础例题

(1) $\int \sin^3 x \mathrm{d}x =$ _____；

(2) $\int \cos^4 x \mathrm{d}x =$ _____.

(3) $\int \csc^4 x \mathrm{d}x =$ _____.

(4) $\int \sec^3 x \mathrm{d}x =$ _____.

i.*iii*.i.*iv*.i.*ii*) 张宇 1000 第 9 章基础 1 节选

(15) $\int \tan^2 x \mathrm{d}x$;

(16) $\int \tan^3 x \mathrm{d}x$;

(17) $\int \tan^4 x \mathrm{d}x$;

(18) $\int \cot^3 x \mathrm{d}x$;

(1.3.1.4.2) 含参讨论

i.*iii*. i.*iv*.*ii*.i)1987 数二;880 基础解答 3 − 6;1000 第九章基础 1 − 20

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}\,(a^2+b^2>0).$$

(1.3.1.4.3) 三角分式

i.*iii*. i.*iv*.*iii*. i)1993 数二

求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x}\mathrm{d}x$.

i.*iii*. i.*iv*.*iii*.*ii*)1994 数一二;880 基础解答 3 − 5

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$$

i.*iii*. i.*iv*.*iii*.*iii*)1996 数二;880 基础解答 3 − 2

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x};$$

(1.3.1.4.4) 复杂三角

i.*iii*. i.*iv*.*iv*.i)1992 数二;880 基础解答 7 − 4

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}\,\mathrm{d}x$$

***a.c.a*.e) 分段函数**

(1.3.1.5.1) 求分段函数的不定积分 (原函数)

i.*iii*.i.*v*.i.i)2016 数一二

(2) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 (　)

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1,\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$

i.*iii*.i.*v*.i.*ii*)2023 数二三;30 例 8.2

2.函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为(　).

A. $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$,

B. $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, & x\leqslant 0\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$,

(1.3.1.5.2) 分段函数定积分

i.*iii*.i.*v.ii*.i)2004 数三

设 $f(x)=\begin{cases} xe^{x^2}, -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2} \\ -1, x\geqslant\dfrac{1}{2} \end{cases}$，则 $\int_{\frac{1}{2}}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x=$_____.

(1.3.1.5.3) 分段函数反常积分

i.*iii*.i.*v.iii*.i)2009 数二

已知 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{k|x|}\mathrm{d}x = 1$, 则 $k =$ _____.

i.iii.i.v.iii.ii)2011 数二

设函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}(\lambda>0)$, 则 $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x=$ _____.

i.*iii*. i. *v*.*iii*.*iii*)2021 数二

$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|3^{-x^2}\mathrm{d}x=$_____.

(1.3.1.5.4) 求分段函数的变限积分

i.*iii*.i.*v*.*iv*.i)1988 数二；

$\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt(x\geqslant -1)$

i.*iii*.i.*v*.*iv*.*ii*)1993 数二

(3) 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\int_1^x f(t)dt(0\leqslant x\leqslant 2)$, 则 $F(x)$ 为 (　　)

A. $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

B. $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2.\end{cases}$

C. $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3, 0\leqslant x<1,\\ x-1, 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

D. $\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}, & 0\leqslant x<1,\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$

(1.3.1.6.1) 奇偶性

i.*iii*. i.*vi*. i. i) 对称区间

(*a.c.a.f .a.a.a*)1996 数二

$\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$ _____.

(*a.c.a.f .a.a.b*)2001 数二

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x=$ _____.

(*a.c.a.f .a.a.c*)2006 数一二三;880 基础解答 5 − 3

$$\int_{-2}^{2}(x+|x|)\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x$$

$(a.c.a.f.a.a.d)$2015 数一

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$_____.

(*a.c.a.f .a.a.*e)2017 数三

$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2}\right)\mathrm{d}x=$_____.

i.*iii*. i.*vi*. i.*ii*) 需要转化

(*a*.*c*.*a*.*f* .*a*.*b*.*a*)2026 数三

$\int_0^1 x(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=$_____.

(1.3.1.6.2) 区间再现

i.*iii*. i.*vi*.*ii*.i)sin 推论

(*a*.*c*.*a*.*f*.*b*.*a*.*a*)1989 数二;880 基础解答 8 − 3

$\int_0^{\pi} t\sin t dt =$ _____.

i.*iii*. i.*vi*. *ii*. *ii*) 指数相关

(*a*.*c*.*a*.*f*.*b*.*b*.*a*)1995 数三

设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$(A 为常数).

(1) 证明 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x$;

(2) 利用 (1) 的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x$.

(1.3.1.6.3) 求变限积分的定积分

i.*iii*.i.*vi*.*iii*.i)2013 数一; 基础严选第五章解答 5

计算 $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$, 其中 $f(x)=\int_1^x \frac{\ln(t+1)}{t}dt$.

i.*iii*. i.*vi*.*iii*.*ii*)2019 数二

13.已知函数 $f(x)=x\int_1^x \frac{\sin t^2}{t}dt$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$

***a.c.a.g*) 反常积分特殊题型**

(1.3.1.7.1)1993 数三

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$, 求常数 a 的值.

1.3.2.积分应用

a.c.b.a) 几何应用

(1.3.2.1.1) 平均值

i.*iii*.*ii*.i.i.i) 已知函数

(*a.c.b.a.a.a.a*)1999 数二;880 第三章基础填空 11;30 习题 10.5

$f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ 上的平均值为_____.

(*a.c.b.a.a.a.b*)2026 数二

函数 $f(x)=\ln(2+x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的平均值为 _____.

i.*iii*.*ii*.i.i.i.i) 函数未知

(*a*.*c*.*b*.*a*.*a*.*b*.*a*)2016 数二;1000 第十章强化 17(第一问)

已知函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数, 且 $f(0)=0$.

(*I*) 求 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ 上的平均值;

(*II*) 证明 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ 内存在唯一零点.

(1.3.2.1.2) 面积

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.i) 直角坐标

(*a*.*c*.*b*.*a*.*b*.*a*.*a*) 常规

i.*iii*.*ii*.i.i.i.i.i.i.i)1998 数二; 基础严选第六章填空 1

曲线 $y=-x^3+x^2+2x$ 与 x 轴所围图形的面积 $A=$_____.

##i.*iii*.*ii*.i.*ii*.i.i.*ii*)1987 数一;880 第三章基础填空 16; 基础严选第六章填空 3

由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=\mathrm{e}+1-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是 _____

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.i.i.*ii*.i2014 数三

设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域, 则 D 的面积为 _____

i.*iii*.*ii*.i.i.*ii*.i.*iv*)2002 数二; 基础严选第六章填空 5

位于曲线 $y=xe^{-x}(0\leqslant x<+\infty)$ 下方, x 轴上方的无界图形的面积是 _____

(*a.c.b.a.b.a.b*) 指数。三角

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.i.i.*ii*.i)2019 数一二三;30 例 10.4

求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

(*a.c.b.a.b.a.c*) 面积最值

i.*iii*.*ii*.ii.*ii*.i.*iii*.i1992 数二;30 习题 10.6

求曲线 $y=\sqrt{x}$ 的一条切线 l, 使该曲线与切线 l 及直线 $x=0, x=2$ 所围成图形面积最小.

i.*iii*.*ii*.i.i.*ii*.ii.*ii*.*ii*)2024 数三

19.设 $t>0$, 平面有界区域 D 由曲线 $y=xe^{-2x}$ 与直线 $x=t, x=2t$ 及 x 轴围成, D 的面积为 $S(t)$, 求 $S(t)$ 的最大值.

(*a.c.b.a.b.a.d*) 与极限结合

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.i.*iv*.i)2014 数二

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}, x\in[0,1]$, 定义函数列:

$$f_1(x)=f(x), f_2(x)=f\big(f_1(x)\big), \cdots, f_n(x)=f\big(f_{n-1}(x)\big), \cdots.$$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$, 直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nS_n$.

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.*ii*) 极坐标

(*a*.*c*.*b*.*a*.*b*.*b*.*a*) 对数螺线

i.*iii*.*ii*.i.i.*ii*.*ii*.i2003 数二; 基础严选第六章填空 6

(4) 设曲线的极坐标方程为 $\rho = \mathrm{e}^{a\theta}(a>0)$，则该曲线上相应于 θ 从 0 变到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积为 _____

(*a.c.b.a.b.b.b*) 三叶玫瑰线

i.*iii*. *ii*. i. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*2022 数二

已知曲线 L 的极坐标方程为 $r=\sin 3\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3}\right)$, 则 L 围成的有界区域的面积为_____.

(*a.c.b.a.b.b.c*) 双纽线

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*1993 数一;880 第三章综合填空 4; 基础严选第六章选择 2; 李正元例 3.54 − 1

(2) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为 (　)

A. $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　　B. $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta d\theta$　　C. $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}d\theta.$　　D. $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2 d\theta.$

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.*iii*) 参数方程

(*a*.*c*.*b*.*a*.*b*.*c*.*a*)2012 数一

已知曲线 L:$\begin{cases}x=f(t),\\ y=\cos t\end{cases}$,$\left(0\leqslant t<\dfrac{\pi}{2}\right)$, 其中函数 $f(t)$ 具有连续导数, 且 $f(0)=0, f'(t)>0\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$.若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1, 求函数 $f(t)$ 的表达式, 并求以曲线 L 及 x 轴和 y 轴为边界的区域的面积.

(1.3.2.1.3) 旋转体体积

i.*iii*.*ii*.i.*iii*.i) 绕坐标轴旋转

(*a*.*c*.*b*.*a*.*c*.*a*.*a*) 常规

i.*iii*.*ii*.ii.*ii*.i1.*ii*)2010 数三

(10) 设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}(\mathrm{e}\leqslant x<+\infty)$ 下方, x 轴上方的无界区域为 G, 则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积为 _____

i.*iii*. *ii*. i. *ii*. i. *ii*. *ii*)2023 数二三

【例 3.47】(2023, 数二、三) 设区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}},x\geqslant 1\right\}$.

(*I*) 求 D 的面积;

(*II*) 求 D 绕 x 轴旋转所围旋转体的体积 V_x.

i.*iii*.*ii*.i.*iii*.i.*ii*)2019 数二三

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$ 的特解.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$, 求 D 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

i.*iii*.*ii*.i.*iii*.i.*ii*.)2021 数三

(13) 设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{x}\sin\pi x(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 x 轴围成，则 D 绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 _____

i.*iii*. *ii*. i.*ii*.i. i. i.*v*)2009 数二

设非负函数 $y=y(x)(x\geqslant 0)$ 满足微分方程 $xy''-y'+2=0$, 当曲线 $y=y(x)$ 过原点时, 其与直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成平面区域 D 的面积为 2, 求 D 绕 y 轴旋转所得旋转体体积.

(*a.c.b.a.c.a.b*) 补全作差

i.*iii*. *ii*. i.*ii*.i.i.*ii*.i)1994 数三;880 第三章综合解答 36 已知曲线 $y=a\sqrt{x}(a>0)$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线, 求:

(1) 常数 a 及切点 (x_0,y_0);

(2) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x.

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.*ii*.i.*ii*.*ii*)2012 数二

过点 $(0,1)$ 作曲线 L:$y=\ln x$ 的切线, 切点为 A, 又 L 与 x 轴交于 B 点, 区域 D 由 L 与直线 AB 围成.求区域 D 的面积及 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

i.*iii*.*ii*.i.*iii*.i.*ii*.*ii*. *iii*)2020 数二;30 例

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f(x)$, 并求曲线 $y=f(x)$, $y=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.i.i.*ii*.*iv*)2020 数三

(12) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\left|\frac{x}{2}\leqslant y\leqslant\frac{1}{1+x^2},0\leqslant x\leqslant 1\right.\right\}$, 则 D 绕 y 轴旋转所成的旋转体的体积为 ____

(*a.c.b.a.c.a.c*) 体积关系

i.*iii*. *ii*. i.*iii*. i.*iii*. i2015 数二

设 $A>0,D$ 是由曲线段 $y=A\sin x\left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 及直线 $y=0,x=\dfrac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域, V_1,V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积.若 $V_1=V_2$，求 A 的值.

(*a.c.b.a.c.a.d*) 旋转体最值

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.i.*iv*.i)2024 数二

19.设 $t>0$, 求曲线 $y=\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$ 与直线 $x=t, x=2t$ 及 x 轴所围平面图形, 绕 x 轴旋转所得的旋转体体积为 $V(t)$, 求 $V(t)$ 的最大值.

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.*ii*) 绕坐标轴平行线转

(*a*.*c*.*b*.*a*.*c*.*b*.*a*) 常规

i.*iii*.*ii*.i.*iii*.*ii*.i11996 数二；武基础严选第 6 章选择 4

(5) 设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $g(x)<f(x)<m(m$ 为常数), 由曲线 $y=g(x),y=f(x),x=a$ 及 $x=b$ 所围平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积为 (　)

A. $\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$　　B. $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$

C. $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$　　D. $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x.$

(*a.c.b.a.c.b.b*) 圆域

i.*iii*. *ii*. i. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*. i)1993 数二;880 第三章综合解答 39; 李正元例 3.55

设平面图形 A 由 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 所确定, 求图形 A 绕直线 $x=2$ 旋转一周所得旋转体的体积.

(*a.c.b.a.c.b.c*) 切线

i.*iii*.*ii*.i.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*2003 数一

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线, 该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(I) 求 D 的面积 A;

(II) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

(*a.c.b.a.c.b.d*) 复杂区域

i.*iii*. *ii*. i. *ii*. *ii*. *ii*. *iv*. i)1994 数二;880 第三章综合解答 51;30 习题 10.9

求曲线 $y=3-\left|x^2-1\right|$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转所得的旋转体体积.

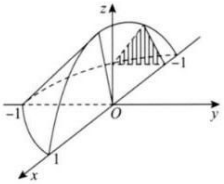
i.*iii*.*ii*.i.*ii*.*ii*.*iv*. *ii*)2014 数二

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$, 且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)\ln y$, 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

(1.3.2.1.4) 平行截面面积已知的立体体积

i.*iii*.*ii*.i.*iv*.i)∞∘1000;880 第三章基础解答 22

2.如图所示, 设立体的底是 xOy 平面上介于 $y=x^2-1$ 和 $y=0$ 之间的平面区域, 该立体垂直于 x 轴的任一截面是一个等边三角形, 则此立体的体积为 (　).



A. $\frac{\sqrt{3}}{15}$

B. $\frac{2\sqrt{3}}{15}$

C. [文件中该选项为空]

D. $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

(1.3.2.1.5) 弧长 (数一二)

i.*iii*. *ii*. i.*v*.i) 直角坐标

(*a*.*c*.*b*.*a*.e.*a*.*a*) 隐含范围

i.*iii*.*ii*.i.*v*.i.i.i.i)2023 数二

曲线 $y=\int_{-\sqrt{3}}^{x}\sqrt{3-t^2}\,dt$ 的弧长 $s=$_____.

(*a.c.b.a.*e.*a.b*) 已知范围

i.*iii*.*ii*.i.*v*.i.*ii*.i)1992 数二;30 例 10.

10 计算曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度.

i.*iii*.*ii*.i.*v*.i.*ii*.*ii*)2011 数一二

曲线 $y=\int_0^x \tan t dt\left(0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}\right)$ 的弧长 $s=$_____.

i.*iii*.*ii*.i.*v*.i.*ii*.*iii*)2019 数二

12.曲线 $y=\ln\cos x\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}\right)$ 的弧长为 _____

i.*iii*.*ii*.i.*v*.i.*ii*.*iv*)2022 数二

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $2xy'-4y=2\ln x-1$ 的满足条件 $y(1)=\dfrac{1}{4}$ 的解, 求曲线 $y=y(x)(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$ 的弧长.

i.*iii*.*ii*.i.*v*.i.*ii*.*v*)2003 数二

设位于第一象限的曲线 $y=f(x)$ 过点 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right)$, 其上任一点 $P(x,y)$ 处的法线与 y 轴的交点为 Q, 且线段 PQ 被 x 轴平分.

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 的方程;

(2) 已知曲线 $y=\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的弧长为 l，试用 l 表示曲线 $y=f(x)$ 的弧长 s.

i.*iii*.*ii*.i.*v.ii*) 极坐标

(*a*.*c*.*b*.*a*.e.*b*.*a*)1996 数一

心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的弧长为 _____.

(*a*.*c*.*b*.*a*.e.*b*.*b*)2010 数二

当 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 时，对数螺线 $r = \mathrm{e}^{\theta}$ 的弧长为 _____

i.*iii*.*ii*.i.*v.iii*) 参数方程

(*a*.*c*.*b*.*a*.e.*c*.*a*)1995 数二

求摆线 $\begin{cases} x=1-\cos t, \\ y=t-\sin t \end{cases}$ 一拱 $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的弧长 s.

(1.3.2.1.6) 表 (侧) 面积 (数一二)

i.*iii*. *ii*. i. i. *vi*. i) 直角坐标

(*a*.*c*.*b*.*a*.*f*.*a*.*a*)1998 数二;660 数二 129;30 例 10.12

设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$, 过原点作其切线, 求由此曲线、切线及 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的表面积.

$(a.c.b.a.f.a.b)$2004 数二

曲线 $y=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ 与直线 $x=0,x=t(t>0)$ 及 $y=0$ 围成一曲边梯形.该曲边梯形绕 x 轴旋转一周得一旋转体, 其体积为 $V(t)$, 侧面积为 $S(t)$, 在 $x=t$ 处的底面积为 $F(t)$.

(1) 求 $\dfrac{S(t)}{V(t)}$ 的值； (2) 计算极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{S(t)}{F(t)}$.

(*a.c.b.a.f.a.c*)2021 数二

设函数 $f(x)$ 满足 $\int \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}x^2-x+C$,$L$ 为曲线 $y=f(x)(4\leqslant x\leqslant 9)$, 记 L 的弧长为 s,L 绕 x 轴旋转一周所形成的曲面面积为 A，求 s 与 A.

i.*iii*.*ii*.i.i.*vi*.*ii*) 参数方程

(*a*.*c*.*b*.*a*.*f*.*b*.*a*)2016 数二

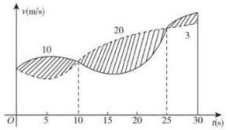
设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\leqslant x\leqslant 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}\left(0\leqslant t\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 围成的平面区域, 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

***a.c.b.b*) 物理应用 (数一二)**

(1.3.2.2.1) 路程

i.*iii*.*ii*.*ii*.i.i.i)2017 数二

(6) 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位:*m*) 处.图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s), 虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$, 三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3.计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:*s*)，则 (　)



A. $t_0=10$.　　B. $15<t_0<20$.　　C. $t_0=25$.　　D. $t_0>25$.

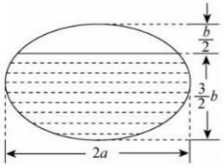
i.*iii*.*ii*.*ii*.ii.*ii*2024 数二

某物体以速度 $v(t)=t+k\sin\pi t$ 做直线运动, 若它从 $t=0$ 到 $t=3$ 的时间段内平均速度是 $\frac{5}{2}$, 则 $k=$_____.

(1.3.2.2.2) 质量

i.*iii*.*ii*.*ii*.*ii*.i)2010 数二

一个高为 l 的柱体形贮油罐, 底面是长轴为 $2a$, 短轴为 $2b$ 的椭圆.现将贮油罐平放, 当油罐中油面高度为 $\frac{3}{2}b$ 时 (如图), 计算油的质量. (长度单位为 m, 质量单位为 kg, 油的密度为常量 ρ, 单位为 $\mathrm{kg/m^3}$.)

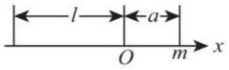


(1.3.2.2.3) 受力

i.*iii*.*ii*.*ii*.*iii*.*ii*.i) 万有引力

(*a*.*c*.*b*.*b*.*c*.*a*.*a*)1991 数二; 基础严选第六章选择 5

(5) 如图，x 轴上的一线密度为常数 μ，长度为 l 的细杆，若质量为 m 的质点到杆右端的距离为 a, 已知引力系数为 k, 则质点和细杆之间引力的大小为 (　)



A. $\int_{-l}^{0}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.　　B. $\int_{0}^{l}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a-x)^2}$.　　C. $2\int_{-\frac{l}{2}}^{0}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.　　D. $2\int_{0}^{\frac{l}{2}}\frac{km\mu\mathrm{d}x}{(a+x)^2}$.

(*a.c.b.b.c.a.b*)2025 数二

6.设单位质点 P,Q 分别位于点 $(0,0)$ 和 $(0,1)$ 处，P 从点 $(0,0)$ 出发沿 x 轴正向移动，记 G 为引力常量，则当质点 P 移动到点 $(l,0)$ 时，克服质点 Q 的引力所做的功为

A. $\int_0^l \frac{G}{x^2+1}\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^l \frac{Gx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^l \frac{G}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^l \frac{G(x+1)}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

(*a.c.b.b.c.a.c*)2026 数二

设线密度为 1 的均匀细棒的两个端点分别在 $(-1,0),(1,0)$, 在 $(0,1)$ 处有一个质量为 m 的质点, G 为引力常数，则细棒对质点的万有引力为 (　)

A. $2\int_0^1 \frac{Gmx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$　　B. $2\int_0^1 \frac{Gm}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$　　C. $2\int_0^1 \frac{Gmx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$　　D. $2\int_0^1 \frac{Gm}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

i.*iii*.*ii*.*ii*.*iii*.*ii*) 液体压力

(*a*.*c*.*b*.*b*.*c*.*b*.*a*)2020 数二;

12 斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中, 且斜边与水面相齐.记重力加速度为 g，水的密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为 _____.

(1.3.2.2.4) 做功

i.*iii*.*ii*.*ii*.*iv*.i) 克服重力做功

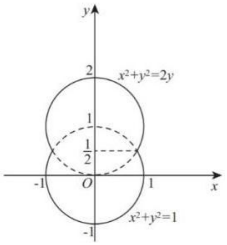
(*a*.*c*.*b*.*b*.*d*.*a*.*a*) 抽水做工

i.*iii*.*ii*.*ii*.*iv*.i.i.i)2011 数二

一容器的内侧是由右图中曲线绕 y 轴旋转一周而成的曲面, 该曲线由 $x^2+y^2=2y\left(y\geqslant\frac{1}{2}\right)$ 与 $x^2+y^2=1\left(y\leqslant\frac{1}{2}\right)$ 连接而成.

(*I*) 求容器的容积;

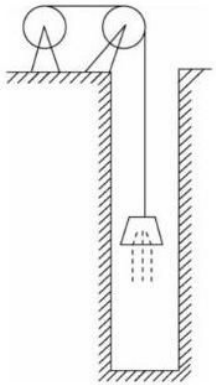
(*II*) 若将容器内盛满的水从容器顶部全部抽出, 至少需要做多少功?(长度单位为 m, 重力加速度为 gm/s^2，水的密度为 10^3kg/m^3.)



(*a.c.b.b.d.a.b*) 提拉物体

i.*iii*.*ii*.*ii*.*iv*.i.*ii*.i)1999 数一二

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口 (如图).已知井深 30m，抓斗自重 400N，缆绳每米重 50N，抓斗抓起的污泥重 2000N，提升速度为 3m/s.在提升过程中，污泥以 20N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功? (说明: ① $1N\times 1m=1J$;m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；②抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.)



i.*iii.ii.ii.iv.ii*) 打桩

(*a.c.b.b.d.b.a*)2003 数一

某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层.汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而做功.设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比 (比例系数为 k,$k>0$), 汽锤第一次击打将桩打进地下 $a(m)$.根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 $r(0<r<1)$.问

(*I*) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(*II*) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？ (注:m 表示长度单位米).

(1.3.2.2.5) 形心质心

i.*iii*.*ii*.*ii*.*v*.i) 平面

(*a*.*c*.*b*.*b*.e.*a*.*a*)2013 数二;30 例 10.9

设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$.

(I) 求 L 的弧长;

(II) 设 D 是由曲线 L, 直线 $x=1, x=\mathrm{e}$ 及 x 轴所围平面图形, 求 D 的形心的横坐标.

i.*iii*.*ii*.*ii*.*vi*.*ii*) 线

(*a*.*c*.*b*.*b*.e.*b*.*a*)2014 数二

(13) 一根长度为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$ _____.

1.3.3.反常积分审敛

a.c.c.a) 审敛

(1.3.3.1.1)1987 数三

(3) 下列广义积分收敛的是 (　)

A. $\int_e^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.　　B. $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.　　C. $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$.　　D. $\int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

(1.3.3.1.2)1995 数三;660 数二 344

(2) 下列广义积分发散的是 (　)

A. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$　　C. $\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$　　D. $\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\mathrm{d}x$

(1.3.3.1.3)2015 数二

(1) 下列反常积分中收敛的是 (　)

A. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x.$　　B. $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x.$　　C. $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x.$　　D. $\int_2^{+\infty}\frac{x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x.$

(1.3.3.1.4)2019 数二

3.下列反常积分发散的是(　)

A. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.　　B. $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.　　C. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　　D. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

(1.3.3.1.5)2024 数二

设非负函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 给出以下三个命题:

①若 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

②若存在 $p>1$, 使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在, 则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

③若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则存在 $p>1$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)$ 存在.其中真命题的个数为

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

(1.3.3.1.6)2016 数二

(3) 反常积分① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为(　)

A. ①收敛，②收敛.　B. ①收敛，②发散.　C. ①发散，②收敛.　D. ①发散，②发散.

***a.c.c.b*) 敛散性和参数的关系**

i.*iii*.*iii*.*ii*.i.i.)2016 数一

(1) 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\mathrm{d}x$ 收敛，则 (　)

A. $a<1$ 且 $b>1$.　　B. $a>1$ 且 $a+b>1$.　C. $a<1$ 且 $a+b>1$.　D. $a>1$ 且 $a+b>1$.

(1.3.3.2.2) 与 ln 有关

i.*iii*.*iii*.*ii*.*ii*.i)2010 数一数二

(3) 设 m,n 均是正整数，则反常积分 $\int_0^1 \frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\mathrm{d}x$ 的收敛性 (　)

A. 仅与 m 的取值有关.

B. 仅与 n 的取值有关.

C. 与 m,n 的取值都有关.

D. 与 m,n 的取值都无关.

i.*iii.iii.ii.ii.ii*)2013 数二

(4) 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}, & 1<x<\mathrm{e},\\ \dfrac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}, & x\geqslant \mathrm{e}.\end{cases}$若反常积分$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则(　)

A. $\alpha<-2$.　　B. $\alpha>2$.　　C. $-2<\alpha<0$.　　D. $0<\alpha<2$.

i.*iii.iii.ii.ii.ii.iii*)2022 数二;1000 第八章强化 12

(5) 设 p 为常数，若反常积分 $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p(1-x)^{1-p}}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围是 (　)

A. $(-1,1)$.　　B. $(-1,2)$.　　C. $(-\infty,1)$.　　D. $(-\infty,2)$.

(1.3.3.2.3) 含参有理式

i.*iii*.*iii*. *ii*.*ii*.i)2025 数二三

设 $\int_1^{+\infty} \dfrac{a}{x(2x+a)}\mathrm{d}x=\ln 2$，则 $a=$_____.

(1.3.3.2.4) 其他

i.*iii*.*iii*.*ii*.*iv*.i)2026 数二三; 基础严选第五章选择 7

13.已知 p 为实数，反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p(1+x)}\mathrm{d}x$ 收敛，则 p 的取值范围为 _____.

1.3.4.其他积分题型

a.c.d.a) 定积分几何意义

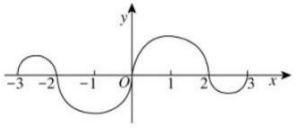
(1.3.4.1.1)1997 数一二

(2) 设在区间 $[a,b]$ 上函数 $f(x)>0, f'(x)<0, f''(x)>0$. 令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, S_2=f(b)(b-a), S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$, 则 (　)

A. $S_1<S_2<S_3$.　　B. $S_2<S_1<S_3$.　　C. $S_3<S_1<S_2$.　　D. $S_2<S_3<S_1$.

(1.3.4.1.2)2007 数一二三

(3) 如图连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周, 在区间 $[-2,0],[0,2]$ 上的图形分别是直径为 2 的下、上半圆周.设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则下列结论正确的是 (　)



A. $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.

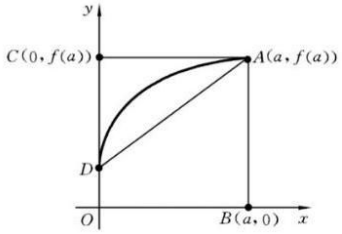
B. $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

C. $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.

D. $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

(1.3.4.1.3)2008 数二三

(2) 如图，曲线段的方程为$y=f(x)$，函数$f(x)$在区间$[0,a]$上有连续的导数，则定积分$\int_0^a xf'(x)\mathrm{d}x$等于(　).



A. 曲边梯形$ABOD$的面积　　B. 梯形$ABOD$的面积

C. 曲边三角形ACD的面积　　D. 三角形ACD的面积

***a.c.d.b*) 积分三大定理**

(1.3.4.2.1)2006 数二

(8) 设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续， $x=0$ 是其第一类间断点，则 $\int_0^x f(t)dt$ 是 (　　).

A. 连续的奇函数

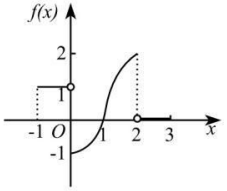
B. 连续的偶函数

C. 在 $x=0$ 间断的奇函数

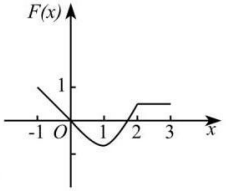
D. 在 $x=0$ 间断的偶函数

(1.3.4.2.2)2009 数一二三;30 例 8.11

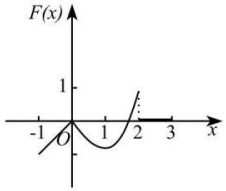
(6) 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形如图所示, 则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 的图形为 (　)



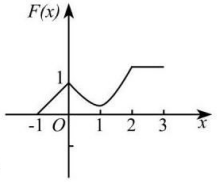
A.



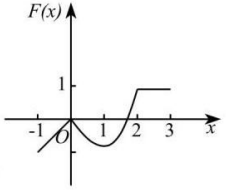
B.



C.



D.



(1.3.4.2.3)2013 数二;880 第三章基础选择 4

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 2, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)dt$, 则 (　　)

A. $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点.

B. $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点.

C. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导.

D. $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导.

***a.c.d.c*) 已知积分等式**

(1.3.4.3.1)1997 数三

若函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$_____.

(1.3.4.3.2)2014 数一

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\mathrm{d}x=\min\limits_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\mathrm{d}x\right\}$, 则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$(　)

A. $2\sin x$.　　B. $2\cos x$.　　C. $2\pi\sin x$.　　D. $2\pi\cos x$.

***a.c.d.d*) 定积分比大小**

(1.3.4.4.1)1994 数一二

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x, P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$, 则有 (　)

A. $N<P<M$.　　B. $M<P<N$.　　C. $N<M<P$.　　D. $P<M<N$.

(1.3.4.4.2)2003 数二

(5) 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则 (　　).

A. $I_1>I_2>1$　　B. $1>I_1>I_2$　　C. $I_2>I_1>1$　　D. $1>I_2>I_1$

(1.3.4.4.3)2010 数一二三;30 例 11.4

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt (n=1,2,\cdots)$ 的大小, 说明理由;

(II) 记 $u_n=\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n dt (n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(1.3.4.4.4)2011 数一二三

(6) 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x)\mathrm{d}x, J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cot x)\mathrm{d}x, K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)\mathrm{d}x$, 则 I,J,K 的关系为 (　)

A. $I<J<K$.　　B. $I<K<J$.　　C. $J<I<K$.　　D. $K<J<I$.

(1.3.4.4.5)2012 数一二

(4) 设 $I_k=\int_0^{k\pi} e^{x^2}\sin x\mathrm{d}x(k=1,2,3)$，则有 (　)

A. $I_1<I_2<I_3$.　　B. $I_3<I_2<I_1$.　　C. $I_2<I_3<I_1$.　　D. $I_2<I_1<I_3$.

(1.3.4.4.6)2018 数一二三;660 数二 339

(5) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x, K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$, 则 (　)

A. $M>N>K$.　　B. $M>K>N$.　　C. $K>M>N$.　　D. $K>N>M$.

(1.3.4.4.7)2022 数一二三

(7) 若 $I_1=\int_0^1 \frac{x}{2(1+\cos x)}\mathrm{d}x, I_2=\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x, I_3=\int_0^1 \frac{2x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$, 则 (　)

A. $I_1<I_2<I_3$.　　B. $I_2<I_1<I_3$.　　C. $I_1<I_3<I_2$.　　D. $I_3<I_2<I_1$.

***a.c.d*.e) 判断定积分值正负 / 与参数相关性**

(1.3.4.5.1)1987 数一二

(2) 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{s}{t}} f(tx)\mathrm{d}x$，其中 $s>0,t>0$，则 I 的值 (　)

A. 依赖于 s 和 t.

B. 依赖于 s,t,x

C. 依赖于 t 和 x, 不依赖于 s.

D. 依赖于 s, 不依赖于 t.

(1.3.4.5.2)1997 数一二;880 第三章综合选择 2

(4) 设 $F(x)=\int_{x}^{x+2\pi}\mathrm{e}^{\sin t}\sin t dt$，则 $F(x)$(　)

A. 为正常数.　　B. 为负常数.　　C. 恒为零.　　D. 不为常数.

(1.3.4.5.3)2024 数三

(2) 设 $I=\int_a^{a+k\pi}|\sin x|\mathrm{d}x, k$ 为整数，则 I 的值

A. 只与 a 有关.　　B. 只与 k 有关.　　C. 与 a,k 均有关.　　D. 与 a,k 均无关.

(1.3.4.6.1)1998 数一二； 880 第三章基础填空 4

设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)dt=$ _____.

(1.3.4.6.2)2015 数二三;880 第三章综合填空 10

设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$.若 $\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则 $f(1)=$_____.

(1.3.4.6.3)2009 数三

(3) 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t} dt > \ln x$ 成立的 x 的范围是 (　)

A. $(0,1)$.　　B. $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.　　C. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.　　D. $(\pi,+\infty)$.

四、多元微分

1.4.1.概念题

a.d.a.a) 基本概念题

(1.4.1.1.1)1994 数一

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 (　)

A. 充分条件而非必要条件.

B. 必要条件而非充分条件.

C. 充分必要条件.

D. 既非充分条件又非必要条件.

(1.4.1.1.2)2002 数一;26 版 660 数一二三第 239 题

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;　　②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;　　④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q, 则有

A. ②⇒③⇒①.　　B. ③⇒②⇒①.　　C. ③⇒④⇒①.　　D. ③⇒①⇒④.

(1.4.1.1.3)2007 数二

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 (　).

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{x\to0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$

***a.d.a.b*) 已知具体多元函数判断其他**

(1.4.1.2.1)2020 数二

5.关于函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0, \\ x, & y=0, \\ y, & x=0, \end{cases}$ 给出以下结论:

① $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=1$; ② $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=1$; ③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$; ④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim f(x,y)=0$

其中正确的个数为( )

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

(1.4.1.2.2)2024 数二

5.已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$，则在点 $(0,0)$ 处（　）.

A. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 可微

B. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 连续，$f(x,y)$ 不可微

C. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 可微

D. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 不连续，$f(x,y)$ 不可微

(1.4.1.2.3)1997 数一

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 (　　)

A. 连续,偏导数存在.

B. 连续,偏导数不存在.

C. 不连续,偏导数存在.

D. 不连续, 偏导数不存在.

1.4.2.重极限

a.d.b.a) 已知重极限推导其他

(1.4.2.1.1) 已知重极限求偏导 / 判断可微 / 求全微分

i.*iv.ii*.i.i.i.)2012 数三;26 版 660 数一二三第 99 题

设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$, 则 $\mathrm{d}z\Big|_{(0,1)}=$_____.

i.*iv*.*ii*.i.i.*ii*)2012 数一

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是 (　)

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

C. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(1.4.2.1.2) 已知重极限求多元复合函数极值

i.*iv*.*ii*.i.i.*ii*.i)2003 数一

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则 (　)

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

D. 根据所给条件无法判别点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

1.4.3.偏导数

a.d.c.a) 多元函数求偏导

(1.4.3.1.1) 一阶偏导

i.*iv.iii*.i.i.i) 判断偏导存在

(*a.d.c.a.a.a.a*)2008 数三

(3) 已知 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则 (　)

A. $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 都存在

B. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在

C. $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 不存在

D. $f_x'(0,0),f_y'(0,0)$ 都不存在

(*a.d.c.a.a.a.b*)2023 数三

1.已知函数 $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$, 则 (　　).

A. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在

B. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 不存在

C. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在

D. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在

i.*iv.iii*.i.i.*ii*) 常规

($a.d.c.a.a.b.a$)2009 数三

设 $z=(x+\mathrm{e}^{y})^{x}$, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$_____.

(*a.d.c.a.a.b.b*)2016 数二三;880 第四章基础选择 9

(2) 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$，则 (　)

A. $f'_x-f'_y=0.$　　B. $f'_x+f'_y=0.$　　C. $f'_x-f'_y=f.$　　D. $f'_x+f'_y=f.$

i.*iv.iii*. i. i.*ii*) 考察换元思想

(*a.d.c.a.a.c.a*)2015 数二

(5) 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是 (　)

A. $\frac{1}{2},0.$　　B. $0,\frac{1}{2}.$　　C. $-\frac{1}{2},0.$　　D. $0,-\frac{1}{2}.$

(1.4.3.1.2) 二阶偏导

i.*iv*.*iii*.i.*ii*.i)2011 数一;880 第四章基础填空 12

设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$, 则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$_____.

i.*iv*.*iii*.i.*ii*.*ii*)2020 数一;26 版 1000 第十三章强化 10

设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy} \mathrm{e}^{xt^2}dt$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$_____.

i.*iv*.*iii*. i. *ii*.*iii*)2022 数二三

(4) 已知$f(t)$连续，令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$，则(　)

A. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

B. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

C. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

D. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

a.d.c.b) 多元复合函数求偏导

(1.4.3.2.1)$f(u)$

i.*iv.iii.ii*.i.i.i)2019 数一

设函数 $f(u)$ 可导, $z=f(\sin y-\sin x)+xy$, 则 $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\cos y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____.

i.*iv*.*iii*.*ii*.ii.ii2022 数一;26 版 1000 第十三章基础 14

(2) 设 $f(u)$ 可导，$z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$，若 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$，则 (　)

A. $f(1)=\frac{1}{2},f'(1)=0.$

B. $f(1)=0,f'(1)=-\frac{1}{2}-$

C. $f(1)=\frac{1}{2},f'(1)=1.$

D. $f(1)=0,f'(1)=1.$

(1.4.3.2.2)$f(u,v)$

i.*iv.iii.ii.ii*.i)2026 数二

设函数 $f(x,y)$ 可微, 且满足 $df(0,0)=\pi \mathrm{d}x+3\mathrm{d}y, g(x)=f(\ln x, \sin \pi x)$, 则 $g'(1)=$ _____.

i.*iv.iii.ii.ii.ii.ii*)2024 数一

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数, 且 $df\big|_{(1,1)}=3\mathrm{d}u+4\mathrm{d}v$. 令 $y=f(\cos x, 1+x^2)$, 则 $\left.\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=$_____.

i.*iv.iii.ii.ii.iii. iii*)2011 数一二

设函数 $z=f(xy,yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$.求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

i.*iv.iii.ii.ii.iv*)2019 数三

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数, 函数 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$.求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

i.*iv.iii.ii.ii.v*)2024 数二

函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数, 且函数 $g(x,y)=f(2x+y,3x-y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-6\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

(I) 求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$;

(II) 若 $\dfrac{\partial f(u,0)}{\partial u}=ue^{-u}, f(0,v)=\dfrac{1}{50}v^2-1$, 求 $f(u,v)$ 的表达式.

i.*iv.iii.ii.ii.vi*)2011 数三

已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数,$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值,$z=f(x+y,f(x,y))$.求

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}.$$

a.d.c.c) 利用变量代换化简偏微分方程

(1.4.3.3.1) 线性变换

i.*iv.iii.iii*.ii. i)2010 数二

设函数 $u=f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足等式 $4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.确定 a,b 的值, 使等式在变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 下简化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(1.4.3.3.2) 非线性变换

i.*iv.iii.iii.ii.*i)2019 数二

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, 求 a,b 的值使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

a.d.c.d) 多元隐函数求偏导

(1.4.3.4.1) 一个方程三个未知数 (常规)

i.*iv.iii.iv.*i.i) 一阶

(*a.d.c.d.a.a.a*) 具体

i.*iv.iii.iv.*i.i.i.i.i)2013 数三

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$_____.

i.*iv*.*iii*.*iv*.i.i.i.*ii*)2021 数二

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$_____.

i.*iv*.*iii*.*iv*.i.i.*ii*.*iii*)2025 数二

1.设函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}dt=0$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$

A. $\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2}\right)$

B. $\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-y^2}\right)$

C. $-\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2}\right)$

D. $-\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-y^2}\right)$

(*a.d.c.d.a.a.b*) 抽象

i.*iv.iii.iv.*i.i.*ii.*i)2010 数一二

(2) 函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$(　)

A. x.　　B. z　　C. $-x$.　　D. $-z$

(*a.d.c.d.a.a.c*) 隐函数存在定理

i.*iv.iii.iv*.i.i.*ii*.i)2005 数一;880 第四章基础选择 5

(10) 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程 (　)

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

i.*iv*.*iii*.*iv*.i.*ii*) 二阶

(*a*.*d*.*c*.*d*.*a*.*b*.*a*)2025 数三

已知函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x xe^{-t^2}dt=1$ 确定，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$_____.

(1.4.3.4.2) 两个方程三个未知数

i.*iv.iii.iv.ii.*i)1999 数一

设 $y=y(x),z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

i.*iv.iii.iv.ii.ii*)2001 数三

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定:$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

***a*.*d*.*c*.e) 求全微分**

(1.4.3.5.1) 具体

i.*iv*.*iii*.*v*.i.i)2011 数三

设函数 $z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$_____.

i.*iv*.*iii*.*v*.i.*ii*)2020 数二三

11.设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$_____.

i.*iv*.*iii*.*v*.i.*iii*)2015 数一三

若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$_____.

(1.4.3.5.2) 抽象

i.*iv.iii.v.ii.*i)2016 数一三;25 版 660 数一二三第 102 题

设函数 $f(u,v)$ 可微, $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$_____.

i.*iv.iii.v.ii.ii*)2021 数一二三

(6) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2, f(x,x^2)=2x^2\ln x$, 则 $df(1,1)=(\quad)$.

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　　B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　　C. $\mathrm{d}y$　　D. $-\mathrm{d}y$

a.d.c.f) 已知全微分求多元函数(偏积分)

(1.4.3.6.1)2017 数二三

(12) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $df(x,y)=ye^{y}\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^{y}\mathrm{d}y, f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$

1.4.4.多元微分应用

a.d.d.a) 单调性

(1.4.4.1.1)2017 数二

(5) 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数, 且对任意的 (x,y) 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则 (　)

A. $f(0,0)>f(1,1)$.　B. $f(0,0)<f(1,1)$.　C. $f(0,1)>f(1,0)$.　D. $f(0,1)<f(1,0)$.

a.d.d.b) 无条件极值

(1.4.4.2.1) 概念题

i.*iv.iv.ii*.i.i.i)2011 数一

3 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且 $f(x)>0, f'(0)=0$, 则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是 (　)

A. $f(0)>1, f''(0)>0$.

B. $f(0)>1, f''(0)<0$.

C. $f(0)<1, f''(0)>0$.

D. $f(0)<1, f''(0)<0$.

(1.4.4.2.2) 直接给出函数

i.*iv.iv.ii.ii*.i)2021 数三

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.ii.ii*)2009 数一三;26 版 660 数一二三第 94 题

求二元函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.ii.iii*)2012 数一二;880 第四章综合解答 9

求函数 $f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.ii.iv*)2013 数一

求函数$f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$的极值.

i.*iv.iv.ii.ii.v*)2026 数一二三

求函数 $f(x,y)=(2x^2-y^2)\mathrm{e}^x$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.ii.vi*)2017 数三

(2) 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是 (　)

A. $(0,0)$.　　B. $(0,3)$.　　C. $(3,0)$.　　D. $(1,1)$.

i.*iv.iv.ii.ii.vii.vd*2020 数一二三

求函数 $f(x,y)=x^3+8y^3-xy$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.ii.viii*)2024 数二三

函数 $f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$ 的极值点是 _____.

i.*iv.iv.ii.ii.ix*)2023 数一

求函数 $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.ii.x*)2023 数二

求函数 $f(x,y)=xe^{\cos y}+\frac{x^2}{2}$ 的极值.

(1.4.4.2.3) 先求函数再求极值

i.*iv.iv.ii.ii*.i) 已知偏导数

(*a.d.d.b.c.a.a*)2015 数二

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^{x}, f'_{x}(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^{x}, f(0,y)=y^{2}+2y$, 求 $f(x,y)$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.iii.ii*) 已知全微分

(*a.d.d.b.c.b.a*)2025 数二

设函数 $f(x,y)$ 可微且满足 $df(x,y)=-2xe^{-y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)\mathrm{d}y, f(0,0)=2$, 求 $f(x,y)$, 并求 $f(x,y)$ 的极值.

i.*iv.iv.ii.iii.iii*) 已知关系式

(*a.d.d.b.c.c.a*)2022 数二

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$, 且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

(*I*) 记 $g(x,y)=f(x,y-x)$, 求 $\dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x}$;

(*II*) 求 $f(u,v)$ 的表达式与极值.

(1.4.4.2.4) 多元隐函数极值

i.*iv.iv.ii.iv.*i)2004 数一;880 第四章综合解答 12

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

a.d.d.c) 条件极值

(1.4.4.3.1) 直接给出

i.*iv.iv.iii*. i. i) 单约束

(*a.d.d.c.a.a.a*)2006 数一二三

(10) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$.已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 (　)

A. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

B. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

C. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

D. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(*a.d.d.c.a.a.b*)2010 数三

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

i.*iv.iv.iii*. i.*ii*) 双约束

(*a.d.d.c.a.b.a*)2008 数二;880 第四章基础解答 8

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

(1.4.4.3.2) 需要处理条件

i.*iv.iv.iii.ii*.i) 距离

(*a.d.d.c.b.a.a*)2013 数二

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

i.*iv.iv.iii.ii.ii*) 面积

(*a.d.d.c.b.b.a*)2018 数一二三

将长为 2*m* 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在,求出最小值.

a.d.d.d) 闭区域最值

(1.4.4.4.1) 判断最值点位置

i.*iv.iv.iv.*i.i)2014 数二

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 (　)

A. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

B. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

C. $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得.

D. $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得.

(1.4.4.4.2) 闭区域

i.*iv.iv.iv.ii*.i)2005 数二

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$, 并且 $f(1,1)=2$.求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

i.*iv.iv.iv.ii.ii*)2007 数一

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4, y\geqslant 0\}$ 上的最大值和最小值.

(1.4.4.4.3) 确定多元函数不等式参数取值范围

i.*iv.iv.iv.iii*.i)2022 数一

当 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 时， $x^2 + y^2 \leqslant ke^{x+y}$ 恒成立，则 k 的取值范围是 _____.

五、二重积分

1.5.1.计算

a.e.*a*.*a*) 直接给出累次积分

(1.5.1.1.1)2017 数二

$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \frac{\tan x}{x} \mathrm{d}x = _____.$

(1.5.1.1.2)2014 数三

$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^1 \left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} - \mathrm{e}^{y^2} \right) \mathrm{d}x = _____.$

(1.5.1.1.3)2022 数二

【例 6.4】(2022，数二)$\int_0^2 \mathrm{d}y \int_y^2 \frac{y}{\sqrt{1+x^3}} \mathrm{d}x =$【　　】

A. $\frac{\sqrt{2}}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

(1.5.1.1.4)2018 数二

【例 6.12】(2018, 数二)$\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2-x^2}(1-xy)\mathrm{d}y=$【　　】

A. $\frac{5}{3}$　　B. $\frac{5}{6}$　　C. $\frac{7}{3}$　　D. $\frac{7}{6}$

a.e.*a.b*) 直角坐标

(1.5.1.2.1) 常规题

i.*v*.i.*ii*.i.i)2015 数二三

计算二重积分 $\iint_D x(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2, y\geqslant x^2\}$.

i.*v*.i.*ii*.i.*ii*)2016 数三

设 $D=\{(x,y)\,//\,x\,|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\}$, 则 $\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ _____.

i.*v*.i.*ii*.i.*iii*)2017 数三

计算积分 $\iint_D \frac{y^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

i. *v*. i. *ii*. i.*iv*)2026 数三

设平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$, 计算 $\iint_D \dfrac{y}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

i.*v*.i.*ii*.i.*v*)2018 数三

【例 6.6】(2018, 数三) 设区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3\left(1-x^2\right)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成, 计算二重积分

$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

i.*v*.i.*ii*.i.*vi*)2024 数二三

17.设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $xy=\frac{1}{3}, xy=3$ 与直线 $y=\frac{1}{3}x, y=3x$ 围成, 计算

$$\iint_D (1+x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(1.5.1.2.2) 二重积分与多元微分结合 (罕见)

i.*v*.i.*ii*.*ii*.i)2011 数一二

【例 6.2】(2011, 数一、数二) 已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $f(1,y)=0, f(x,1)=0$, $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=a$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$, 计算二重积分 $I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(1.5.1.2.3) 积分区域 *D* 由参数方程给出 (摆线)

i.*v*.i.*ii*.*iii*.i)2018 数二

【例 6.3】(2018, 数二) 设平面区域 D 由曲线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 与 x 轴围成, 计算二重积分

$$\iint_D (x+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(1.5.1.2.4) 极坐标逆问题

i.*v*.i.*ii*.*iv*.i)2010 数二

【例 6.9】(2010, 数二) 计算二重积分

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,dr d\theta, \text{ 其中 } D=\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant \sec\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

a.e.*a.c*) 极坐标

(1.5.1.3.1) 圆域相关

i.*v*.i.*iii*.i.i)2021 数三;1000 强化

设有界区域 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 和直线 $y=x$ 以及 x 轴在第一象限围成的部分, 计算二重积分

$$\iint_D \mathrm{e}^{(x+y)^2}\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

i.*v*.i.*iii*. i.*ii*)2020 数三

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1, y\geqslant 0\}$, 连续函数 $f(x,y)$ 满足 $f(x,y)=y\sqrt{1-x^2}+x\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,求 $\iint_D xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

i. *v*. i.*iii*. i.*iii*)2024 数一

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{1-y^2}\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1\right\}$，计算 $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

i.*v*. i.*iii*. i.*iv*)2025 数二

已知平面有界区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4x, x^2+y^2\leqslant 4y\}$, 计算 $\iint_D (x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

i. *v*. i.*iii*.i.*v*)2025 数三

已知平面有界区域 $D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x, x^2\leqslant y\}$, 计算二重积分 $\iint_D (x-y+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(1.5.1.3.2) 偏心圆域相关

i. *v.* i.*iii*.*ii*.i)2011 数二

设平面区域 D 由直线 $y=x$, 圆 $x^2+y^2=2y$ 及 y 轴所围成, 则二重积分 $\iint_D xyd\sigma=$_____.

i. *v.* i.*iii.ii.ii*)2009 数二三

【例 6.10】(2009, 数二、数三) 计算二重积分 $\iint_D (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2, y\geqslant x\right\}$.

(1.5.1.3.3) 其他

i. *v.* i. *iii. iii. ii*)2022 数一二三

【例 6.4】(2022, 数一、数二) 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid y-2\leqslant x\leqslant\sqrt{4-y^2},0\leqslant y\leqslant 2\right\}$, 计算二重积分

$$\iint_D\frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

i.*v*.i.*iii*.*iii*.*ii*)2020 数二

【例 6.9】(2020, 数二) 设区域 D 由直线 $x=1, x=2, y=x$ 与 x 轴围成, 计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(1.5.1.3.4) 积分区域以极坐标方程给出

i.*v*.i.*iii*.*iv*.i)2012 数二

计算二重积分 $\iint_D xyd\sigma$, 其中区域 D 由曲线 $r=1+\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 与极轴围成.

i. *v.* i. *iii.iv. ii*)2016 数一

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\mid 2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$ 计算二重积分 $\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(1.5.1.3.5) 积分区域难画

i. *v.* i.*iii*.*v*.i)2019 数二

设平面区域 $D=\left\{(x,y)||x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4\right\}$, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

i.*v*.i.*iii*.*v*.*ii*)2026 数二

计算 $I=\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}y\sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$

i.*v.* i.*iii*.*v*.*iii*)2021 数二

曲线 $\left(x^2+y^2\right)^2=x^2-y^2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 与 x 轴围成的区域为 D, 求 $\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

i. *v.* i.*iii*.*v*.*iv*)2023 数二

设平面有界区域 D 位于第一象限, 由曲线 $x^2+y^2-xy=1, x^2+y^2-xy=2$ 与直线 $y=\sqrt{3}x, y=0$ 围成，计算 $\iint_D \frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(1.5.1.3.6) 被积函数为若干项相加

i.*v.* i.*iii*.*vi*. i)2004 数三

求 $\iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)d\sigma$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域

i. *v.* i.*iii*.*vi*.*ii*)2017 数二

计算二重积分 $\iint_D (x+1)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$.

i.*v*. i.*iii*.*vi*.*iii*)2016 数二

【例 6.14】(2016, 数二) 设区域 D 由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 围成, 计算二重积分 $\iint_D \frac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(1.5.1.3.7) 被积函数分子是分母其中一项

i. *v.* i. *iii.vii.* i)2014 数二三

【例 6.17】(2014, 数二、三) 计算二重积分 $\iint_D \dfrac{x\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

其中 $D=\left\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4, x\geqslant 0, y\geqslant 0\right\}$.

a.e.*a.d*) 被积函数为分段函数

(1.5.1.4.1) 显式分段

i.*v*.i.*iv*.i.i)2003 数三

(3) 设 $a>0, f(x)=g(x)=\begin{cases} a, \text{若} 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ 而 D 表示全平面, 则 $I=\iint_D f(x)g(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____.

i. *v.* i.*iv.*i.*ii*)2022 数三

已知函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 则 $\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)f(y-x)\mathrm{d}y=$_____.

(1.5.1.4.2) 隐式分段

i.*v*.i.*iv*.*ii*.i) 绝对值

(*a*.e.*a*.*d*.*b*.*a*.*a*)2005 数二三

计算二重积分 $\iint_D |x^2+y^2-1|d\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$

(*a*.e.*a*.*d*.*b*.*a*.*b*)2023 数三

已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leqslant 1\right\}$, 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}-1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

i.*v*.i.*iv*.*ii*.*ii*) 最大值最小值

(*a*.e.*a*.*d*.*b*.*b*.*a*)1995 数三

计算二次积分 $I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(*a*.e.*a*.*d*.*b*.*b*.*b*)2002 数一

计算二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

(*a*.e.*a*.*d*.*b*.*b*.*c*)2008 数二三

计算 $\iint_D \max\{xy,1\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$

i.*v*.i.*iv*.*ii*.*iii*) 取整

(*a*.e.*a*.*d*.*b*.*c*.*a*)2005 数一

设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数, 计算二重积分 $\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

1.5.2.其他

a.e.*b*.*a*) 交换积分次序

(1.5.2.1.1) 直角坐标交换

i.*v*.*ii*.i.i.i)2007 数二三

(8) 设函数 $f(x,y)$ 连续，则二次积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dx\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y$ 等于 (　).

A. $\int_0^1 dy\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

B. $\int_0^1 dy\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

D. $\int_0^1 dy\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

i. *v*. *ii*. i. i. *ii*)2024 数二三

6.设 $f(x,y)$ 是连续函数, 则 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x,y)\mathrm{d}y=$(　　).

A. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

B. $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

C. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{6}}^{\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$

D. $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

i. *v*. *ii*. i. i. *ii*)2001 数一

交换积分次序 $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x=$_____.

i.*v.ii*.i.i.*iv*)2025 数一二

4.设函数 $f(x,y)$ 连续, 则 $\int_{-2}^{2}dx\int_{4-x^2}^{4}f(x,y)\mathrm{d}y=$

A. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$

B. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$

C. $\int_0^4\left[\int_{-2}^{-\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{2}^{\sqrt{4-y}}f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$

D. $2\int_0^4dy\int_{\sqrt{4-y}}^{2}f(x,y)\mathrm{d}x$

i.*v*.*ii*.i.i.*v*)2025 数三

4.设函数 $f(x)$ 连续, 则 $\int_0^1 dy\int_0^y f(x)\mathrm{d}x$

A. $\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x$　　B. $\int_0^1 (1+x)f(x)\mathrm{d}x$　　C. $\int_0^1 (x-1)f(x)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^1 (1-x)f(x)\mathrm{d}x$

(1.5.2.1.2) 极直互换

i.*v.ii*.i.*ii*.i)2006 数一二

(8) 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ 等于 (　)

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$

B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$

D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$

i. *v*. *ii*. i. *ii*. *ii*)2012 数三

(3) 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^2 f(r^2) r dr =$ (　　)

A. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) \mathrm{d}y.$

B. $\int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2) \mathrm{d}y.$

C. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2) \mathrm{d}x.$

D. $\int_0^2 dy \int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x^2+y^2) \mathrm{d}x.$

i. *v*. *ii*. i. *ii*. *iii*)2014 数一

(3) 设 $f(x,y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\mathrm{d}x=$ (　　)

A. $\int_0^1 dx\int_0^{x-1} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$

B. $\int_0^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{-1}^0 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x,y)\mathrm{d}y.$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr.$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$

(1.5.2.1.3) 写极坐标

i. *v*. *ii*. i. *ii*.*ii*. i)2004 数二

【例 6.7】(2004, 数二) 设 $f(u)$ 连续, 区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$, 则 $\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad)$

A. $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}}f(xy)\mathrm{d}y$

B. $2\int_0^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)dr$

D. $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f\left(r^2\sin\theta\cos\theta\right)rdr$

i.*v.ii*.i.*iii.ii*)2015 数一二

(4) 设 D 是第一象限中的曲线 $2xy=1,4xy=1$ 与直线 $y=x,y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域, 函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续, 则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad)$

A. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$

B. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

C. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{\sin2\theta}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)dr.$

D. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{\pi}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{\sin2\theta}}}}(r\cos\theta,r\sin\theta)dr$

a.e.*b*.*b*) 二重积分比大小以及定正负

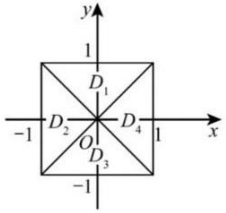
(1.5.2.2.1)2005 数三;880 综合选择 1

(8) 设 $I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma, I_2=\iint_D \cos(x^2+y^2)d\sigma, I_3=\iint_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, 则 (　)

A. $I_3>I_2>I_1$.　　B. $I_1>I_2>I_3$.　　C. $I_2>I_1>I_3$.　　D. $I_3>I_1>I_2$.

(1.5.2.2.2)2009 数一

(2) 如图，正方形 $\{(x,y)||x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=$ (　　)



A. I_1.　　B. I_2.　　C. I_3.　　D. I_4.

(1.5.2.2.3)2013 数二三

【例 6.16】(2013, 数二、三) 设 D_k 为圆域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 位于第 k 象限的部分. 记 $I_k=\iint_{D_k}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(k=1,2,3,4)$, 则 I

A. $I_1>0$　　B. $I_2>0$　　C. $I_3>0$　　D. $I_4>0$

(1.5.2.2.4)2016 数三;25 版 0.1w 强化 5

【例 6.7】(2016, 数三) 设 $J_i=\iint_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\mathrm{i}=1,2,3)$, 其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}, D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}, D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, x^2\leqslant y\leqslant 1\}$,则

A. $J_1<J_2<J_3$　　B. $J_3<J_1<J_2$　　C. $J_2<J_3<J_1$　　D. $J_2<J_1<J_3$

(1.5.2.2.5)2019 数二

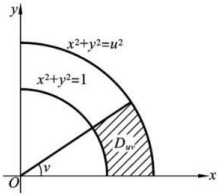
5.已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle||x|+|y|\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$, 记 $I_1=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, I_2=\iint_D\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$ $I_3=\iint_D\left(1-\cos\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 (　)

A. $I_3<I_2<I_1.$　　B. $I_2<I_1<I_3.$　　C. $I_1<I_2<I_3.$　　D. $I_2<I_3<I_1.$

a.e.*b*.*c*) 以二重积分形式给出的函数

(1.5.2.3.1)2008 数学二三

(4) 设函数 f 连续，若 $f(u,v)=\iint_{D_{uv}}\frac{f(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_{uv} 为图中阴影部分，则 $\frac{\partial F}{\partial u}=$(　)



A. $vf(u^2)$　　B. $\frac{v}{u}f(u^2)$　　C. $vf(u)$　　D. $\frac{v}{u}f(u)$

(1.5.2.3.2)2021 数二

已知函数 $f(t)=\int_1^{t^2} dx \int_{\sqrt{x}}^{t} \sin\frac{x}{y}\mathrm{d}y$, 则 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=$_____.

***a*.e.*b.d*) 利用含二重积分等式求函数表达式**

(1.5.2.4.1)1999 数三

(2) 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于 (　)

A. xy　　B. $2xy$　　C. $xy+\frac{1}{8}$　　D. $xy+1$

a.e.*b*.e) 抽象函数二重积分

(1.5.2.5.1)1995 数一;880 基础填空 5

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 并设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$, 求 $\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$.

(1.5.2.5.2)2005 数二;880 基础填空 4

【例 6.15】(2005, 数二) 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$,$f(x)$ 为正值连续函数,a,b 为常数,则 $\iint_D \dfrac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　)

A. $ab\pi$　　B. $\dfrac{ab}{2}\pi$　　C. $(a+b)\pi$　　D. $\dfrac{a+b}{2}\pi$

六、微分方程

1.6.1.微分方程解的性质与结构

a.f.a.a) 一阶

(1.6.1.1.1)2010 数二三;880 第六章综合选择 4

(2) 设 y_1,y_2 是一阶线性非齐次微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个特解, 若常数 λ,μ 使 $\lambda y_1+\mu y_2$ 是该方程的解， $\lambda y_1-\mu y_2$ 是该方程对应的齐次方程的解，则 (　)

A. $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{2}$.　　B. $\lambda=-\frac{1}{2},\mu=-\frac{1}{2}$.　　C. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{1}{3}$.　　D. $\lambda=\frac{2}{3},\mu=\frac{2}{3}$.

(1.6.1.1.2)2026 数二

设 $y_1(x),y_2(x)$ 是某 2 阶非齐次线性微分方程的两个特解.若常数 λ,μ 使得 $2\lambda y_1(x)+\mu y_2(x)$ 是该方程的解,$\lambda y_1(x)-2\mu y_2(x)$ 是该方程对应的齐次方程的解, 则 (　)

A. $\lambda=\frac{1}{5},\mu=\frac{2}{5}$　　B. $\lambda=\frac{2}{5},\mu=\frac{1}{5}$　　C. $\lambda=\frac{1}{4},\mu=\frac{1}{2}$　　D. $\lambda=\frac{1}{2},\mu=\frac{1}{4}$

(1.6.1.1.3)2006 数三

(10) 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个的解 $y_1(x),y_2(x),C$ 为任意常数, 则该方程通解是( )

A. $C[y_1(x)-y_2(x)]$

B. $y_1(x)+C[y_1(x)-y_2(x)]$

C. $C[y_1(x)+y_2(x)]$

D. $y_1(x)+C[y_1(x)+y_2(x)]$

***a.f.a.b*) 二阶及以上**

(1.6.1.2.1)1989 数一

(3) 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的特解, C_1,C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是 (　)

A. $C_1y_1+C_2y_2+y_3$.

B. $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

C. $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$.

D. $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

(1.6.1.2.2)2013 数一二

(13) 已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-xe^{2x},y_2=\mathrm{e}^{x}-xe^{2x},y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的三个解, 则该方程满足条件 $y\big|_{x=0}=0,y'\big|_{x=0}=1$ 的解为 $y=$_____

1.6.2.解微分方程

a.f.b.a) 一阶

(1.6.2.1.1) 基本类型

i.*vi.ii*.i.i.i) 可分离变量

(*a.f.b.a.a.a.a*)2006 数一二

微分方程 $y'=\frac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 _____

i.*vi*.*ii*.i.i.*ii*) 一侧为 x 分之 y 的函数 (齐次方程)

(*a*.*f*.*b*.*a*.*a*.*b*.*a*)2007 数三

微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\Big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$_____.

i. ***vi.ii.*****i.i.*****ii)** **一侧为** ***xy*** **线性组合的函数**

(*a.f.b.a.a.c.a*)2024 数一二;1800(先于真题出现)

微分方程 $y'=\dfrac{1}{(x+y)^2}$ 满足条件 $y(1)=0$ 的解为 _____.

i.*vi*.*ii*.i.i.*iv*) 一阶线性非齐次

(*a*.*f*.*b*.*a*.*a*.*d*.*a*) 非齐次项为普通函数

i.*vi*.*ii*.i.i.*iv*.i.i)2011 数一二

微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$_____.

(*a.f.b.a.a.d.b*) 非齐次项为分段函数

i.*vi.ii*.i.i.*iv.ii*.i)1999 数三

设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$, 其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$ 试求出 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$, 使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程, 且满足条件 $y(0)=0$.

(1.6.2.1.2)有显著特征

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.i)框框*y*撇

(*a*.*f*.*b*.*a*.*b*.*a*.*a*)2*yy*撇

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.i.i.i.i)2019数一

微分方程$2yy'-y^2-2=0$满足条件$y(0)=1$的特解$y=(a.f.b.a.b.a.b)xy$撇

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.i.*ii*.i2014 数一

微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 $y=$_____.

i. *vi*. *ii*. i. i. *ii*. i. *ii*. *ii*)2008 数一三

微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解 $y=$_____.

i. *vi.ii*.i.*ii*.i.*ii.iii*)2025 数三

微分方程 $xy'-y+x^2\mathrm{e}^x=0$ 满足条件 $y(1)-\mathrm{e}$ 的解为 $y=$_____.

(*a.f.b.a.b.a.c*)三角*y*撇

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.i.*ii*.i.*iii*.i)2001 数二

过点$\left(\frac{1}{2},0\right)$且满足关系式$y'\arcsin x+\frac{y}{\sqrt{1-x^2}}=1$的曲线方程为_____

(*a.f.b.a.b.a.d*) 其他 *y* 撇

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.i.*iv*.i)1991 数三

求微分方程 $xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足条件 $y\Big|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 的特解.

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.i.*iv*.*ii*)1993 数一

求微分方程 $x^2y' + xy = y^2$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的特解.

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.*ii*) 框框 d*x* 框框 d*y*

(*a*.*f*.*b*.*a*.*b*.*b*.*a*) 简单分离

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.*ii*.*ii*.i1994 数二

微分方程 $y\mathrm{d}x+\left(x^2-4x\right)\mathrm{d}y=0$ 的通解为 _____

(*a.f.b.a.b.b.b*)齐次

i. *vi.ii*.i.*ii.ii.ii.ii*.i2025 数二

微分方程 $(2y-3x)\mathrm{d}x+(2x-5y)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解为 _____.

(*a.f.b.a.b.b.c*) 一阶线性

i.*vi*.*ii*.i.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*.i)1993 数二

求微分方程 $(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解.

i. *vi.ii*.i.*ii.ii.ii.iii.ii*)1990 数二

求微分方程 $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y\Big|_{x=\mathrm{e}}=1$ 的特解.

(*a.f.b.a.b.b.d*) 含根号下平方和

i.*vi.ii*.i.*ii.ii.iv*.i)1996 数三

求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解.

(*a.f.b.a.b.b.*e) 罕见类型

i. *vi*. *ii*. i. *ii*. *ii*. *v*. i)2012 数二

微分方程 $y\mathrm{d}x+\left(x-3y^2\right)\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y(1)=1$ 的解为 $y=$_____.

a.f.b.b) 二阶

(1.6.2.2.1) 二阶常系数

i.*vi.ii.ii*.i.i.i) 二阶常系数线性齐次

(*a.f.b.b.a.a.a*)2015 数二三

设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解, 且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x)=$

(*a.f.b.b.a.a.b*)2017 数一

微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ _____.

i.*vi.ii.ii.ii.ii.ii*) 二阶常系数线性非齐次

(*a.f.b.b.a.b.a*) 只设不求

i.*vi.ii.ii*.i.i.i.i.i.i)2004 数二

(11) 微分方程 $y''+y=x^2+1+\sin x$ 的特解形式可设为 (　).

A. $y^*=ax^2+bx+c+x(A\sin x+B\cos x)$　　B. $y^*=x(ax^2+bx+c+A\sin x+B\cos x)$

C. $y^*=ax^2+bx+c+A\sin x$　　D. $y^*=ax^2+bx+c+A\cos x$

i. *vi*. *ii*. *ii*. *ii*. i. *ii*. i. *ii*)2011 数二

(4) 微分方程 $y''-\lambda^2 y=e^{\lambda x}+e^{-\lambda x}(\lambda>0)$ 的特解形式为 (　)

A. $a(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.　　B. $ax(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$.　　C. $x(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.　　D. $x^2(ae^{\lambda x}+be^{-\lambda x})$.

i. *vi*.*ii*.*ii*.i.i.*ii*.i.*iii*.i2017 数二

(4) 微分方程 $y''-4y'+8y=\mathrm{e}^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$(　)

A. $Ae^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

B. $Axe^{2x}+\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

C. $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

D. $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

(*a.f.b.b.a.b.b*) 非齐次项为幂指函数

i.*vi*.*ii*.*ii*.i.*ii*.*ii*.i1996 数二

求微分方程 $y''+y'=x^2$ 的通解.

i.*vi*. *ii*. *ii*. i. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*)2026 数三

微分方程 $y''-2y'=e^x$, 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$, 则解为 $y=$_____.

i.*vi.ii.ii*.i.*ii.ii.iii*)1988 数一二

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^x$, 且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合, 求函数 $y=y(x)$.

i.*vi*. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*. *iv*)2010 数一

求微分方程 $y''-3y'+2y=2xe^x$ 的通解.

(*a.f.b.b.a.b.c*) 非齐次项含未知数

i.*vi*.*ii*.*ii*.i.i.*ii*.*ii*.i)1990 数二

求微分方程 $y''+4y'+4y=\mathrm{e}^{ax}$ 的通解, 其中 a 为实数.

i.*vi*.*ii*.*ii*.i.i.*ii*.*iii*.*ii*)1994 数二

求微分方程 $y''+a^2y=\sin x$ 的通解, 其中常数 $a>0$.

(*a.f.b.b.a.b.d*) 非齐次项为两个函数相加

i.*vi*.*ii*.*ii*.i.*ii*.*iv*.i)1991 数二;880 第六章综合填空 6

求微分方程 $y''+y=x+\cos x$ 的通解.

(1.6.2.2.2) 二阶变系数 (数一二)

i.*vi*.*ii*.*ii*.*ii*.i) 二阶可降解

(*a*.*f* .*b*.*b*.*b*.*a*.*a*) 不显含 *y*

i.*vi*.*ii*.*ii*.*ii*.i.i.i.i)2000 数一

微分方程 $xy'' + 3y' = 0$ 的通解为 _____

i.*vi*.*ii*.*ii*.*ii*.*ii*.i.i.*ii*)2007 数二

求微分方程 $y''(x+y'^2)=y'$ 满足初始条件 $y(1)=y'(1)=1$ 的特解.

i.*vi. ii. ii. ii. ii. ii. iii*)2026 数二

求微分方程 $x^2y''-2xy'-(y')^2=0(x>2)$ 满足 $y\big|_{x=3}=\frac{1}{2}, y'\big|_{x=3}=-9$ 的解.

(*a.f.b.b.b.a.b*) 不显含 *x*

i. *vi*. *ii*. *ii*. *ii*. *ii*. i. *ii*. i)2002 数一二

微分方程 $yy''+y'^2=0$ 满足初始条件 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是 _____

i.*vi.ii.ii.ii.ii*) 欧拉方程

(*a.f.b.b.b.b.a*)2021 数一 (仅数学一)

欧拉方程 $x^2y''+xy'-4y=0$ 满足条件 $y(1)=1,y'(1)=2$ 的解为 _____.

(*a.f.b.b.b.b.b*)2024 数二

设 $y(x)$ 为微分方程 $x^2y''+xy'-9y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=2, y'\big|_{x=1}=6$ 的解.

(*I*) 利用变换 $x=\mathrm{e}^t$ 将上述方程化为常系数线性方程, 并求 $y(x)$;

(*II*) 计算 $\int_1^2 y(x)\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

i.*vi.ii.ii.ii.iii*) 反函数

(*a.f.b.b.b.c.a*)2003 数一二

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $y'\neq 0, x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(1) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\frac{d^2x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\frac{3}{2}$ 的解.

i.*vi.ii.ii.ii.iv*) 三角换元

(*a.f.b.b.b.d.a*)2005 数二

用变量代换 $x=\cos t(0<t<\pi)$ 化简微分方程 $(1-x^2)y''-xy'+y=0$, 并求其满足 $y\big|_{x=0}=1, y'\big|_{x=0}=2$ 的特解.

i. *vi.ii.ii.iv.*) 其他

(*a.f.b.b.b.*e.*a*)1998 数二

利用代换 $y=\dfrac{u}{\cos x}$ 将方程 $y''\cos x-2y'\sin x+3y\cos x=\mathrm{e}^{x}$ 化简, 并求出原方程的通解.

(*a.f.b.b.b.*e.*b*)2016 数二

已知 $y_1(x)=e^x, y_2(x)=u(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解.若 $u(-1)=e, u(0)=-1$, 求 $u(x)$, 并写出该微分方程的通解.

a.f.b.c) 高阶常系数线性微分方程

(1.6.2.3.1)1987 数一

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解, 其中常数 $a>0$.

(1.6.2.3.2)2021 数二

微分方程 $y'''-y=0$ 的通解为 _____

(1.6.2.3.3)2022 数二

微分方程 $y'''-2y''+5y'=0$ 的通解为 $y(x)=$_____.

1.6.3.已知解反求微分方程(逆问题)

a.f.c.a)一阶

(1.6.3.1.1)2016 数一

(3) 若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=(\quad)$

A. $3x(1+x^2)$.　　B. $-3x(1+x^2)$.　　C. $\dfrac{x}{1+x^2}$.　　D. $-\dfrac{x}{1+x^2}$.

(1.6.3.1.2)2016 数二

以 $y=x^2-\mathrm{e}^x$ 与 $y=x^2$ 为特解的一阶非齐次线性微分方程为 _____

***a.f.c.b*) 二阶**

(1.6.3.2.1)2015 数一

(2) 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 一个特解,则 (　)

A. $a=-3,b=2,c=-1.$

B. $a=3,b=2,c=-1.$

C. $a=-3,b=2,c=1.$

D. $a=3,b=2,c=1.$

(1.6.3.2.2)2019 数二三

4.已知微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^x$, 则 a,b,c 依次为

A. 1,0,1.　　B. 1,0,2.　　C. 2,1,3.　　D. 2,1,4.

(1.6.3.2.3)2001 数一;26 版 660 数一二三第 83 题

(1) 设 $y=\mathrm{e}^{x}\left(C_{1}\sin x+C_{2}\cos x\right)\left(C_{1},C_{2}\right.$ 为任意常数) 为某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该方程为 _____

(1.6.3.2.4)2009 数一;880 第六章综合选择 2

(10) 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=\left(C_1+C_2x\right)\mathrm{e}^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2,y'(0)=0$ 的解为 $y=$_____.

(1.6.3.2.5)1997 数二;26 版 1000 第十五章基础 18;26 版 660 数一二三第 82 题

(5) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解, 求此微分方程.

***a.f.c.c*) 三阶及以上**

(1.6.3.3.1)2000 数二;26 版 660 数一二三第 221 题

(5) 具有特解 $y_1=\mathrm{e}^{-x},y_2=2xe^{-x},y_3=3\mathrm{e}^{x}$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是 (　).

A. $y'''-y''-y'+y=0$　　B. $y'''+y''-y'-y=0$

C. $y'''-6y''+11y'-6y=0$　　D. $y'''-2y''-y'+2y=0$

(1.6.3.3.2)2008 数一二;26 版 660 数二第 609 题

(3) 在下列微分方程中，以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x\left(C_1,C_2,C_3\right.$ 为任意常数) 为通解的是 (　).

A. $y'''+y''-4y'-4y=0$

B. $y'''+y''+4y'+4y=0$

C. $y'''-y''-4y'+4y=0$

D. $y'''-y''+4y'-4y=0$

1.6.4.处理微分方程解

a.f.d.a) 微分方程解的有界性、奇偶性、周期性

(1.6.4.1.1)2018 数一

已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数.

(I) 若 $f(x)=x$, 求方程的通解;

(II) 若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数, 证明: 方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(1.6.4.1.2)2023 数一二三

(2) 若微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上有界，则 (　)

A. $a<0,b>0.$　　B. $a>0,b>0.$　　C. $a=0,b>0.$　　D. $a=0,b<0.$

a.f.d.b) 微分方程解的极限及渐近线

(1.6.4.2.1)2022 数一数三

【例 4.7】(2022, 数一、三) 设 $y=y(x)$ 为微分方程 $y'+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足初始条件 $y(1)=3$ 的解, 求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

***a.f.d.c*) 微分方程解的导数**

(1.6.4.3.1)2008 数二

设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\mathrm{d}u\end{cases}$ 确定, 其中 $x(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{dt}-2te^{-x}=0,\\ x\Big|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解, 求 $\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

***a.f.d.d*) 微分方程解的凹凸区间、极值、拐点**

(1.6.4.4.1)2012 数一二三

已知函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f''(x)+f(x)=2e^{x}$.

(*I*) 求 $f(x)$ 的表达式;

(*II*) 求曲线 $y=f(x^2)\int_0^x f(-t^2)dt$ 的拐点.

(1.6.4.4.2)2019 数一

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$;(II) 求曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

a.f.d.e) 微分方程解的切法线

(1.6.4.5.1)2021 数二

设 $y=y(x)(x>0)$ 满足微分方程 $xy'-6y=-6$, 且满足 $y(\sqrt{3})=10$,

(I) 求 $y(x)$;

(II) 设 P 为曲线 $y=y(x)$ 上的一点, 曲线 $y=y(x)$ 在点 P 的法线在 y 轴上的截距为 I_P, 为使 I_p 最小, 求 P 的坐标.

a.f.d.f) 微分方程解的反常积分

(1.6.4.6.1)2016 数一

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$, 其中 $0<k<1$.

(I) 证明: 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(II) 若 $y(0)=1, y'(0)=1$, 求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

(1.6.4.6.2)2020 数一

设函数$f(x)$满足$f''(x)+af'(x)+f(x)=0(a>0)$, 且$f(0)=m, f'(0)=n$, 则$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=$_____.

(1.6.4.6.3)2020 数三

设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$, 且 $f(0)=1, f'(0)=-1$.

(I) 求 $f(x)$ 的表达式;

(II) 设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

(1.6.4.6.4)2025 数二

3.如果对微分方程 $y''-2ay'+(a+2)y=0$ 任一解 $y(x)$, 反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 均收敛, 则 a 的取值范围为( )

A. $(-2,-1]$.　　B. $(-\infty,-1]$.　　C. $(-2,0)$.　　D. $(-\infty,0)$.

1.6.5.以各种形式给出微分方程

a.f.e.a) 极限

(1.6.5.1.1)2002 数二

已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导, $f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, 且满足 $\lim\limits_{h\to0}\left(\dfrac{f(x+hx)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{h}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, 求 $f(x)$.

a.f.e.*b*) 含导数等式

(1.6.5.2.1)2001 数二

设函数$f(x),g(x)$满足$f'(x)=g(x),g'(x)=2\mathrm{e}^{x}-f(x)$, 且$f(0)=0,g(0)=2$, 求

$$\int_{0}^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^{2}}\right]\mathrm{d}x.$$

(1.6.5.2.2)2003 数三

设 $F(x)=f(x)g(x)$, 其中函数 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件:

$f'(x)=g(x),g'(x)=f(x)$, 且 $f(0)=0,f(x)+g(x)=2e^{x}$.

(1) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程;

(2) 求出 $F(x)$ 的表达式.

(1.6.5.2.3)2010 数二

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=2t+t^2,\\ y=\psi(t)\end{cases}(t>-1)$ 所确定, 其中 $\psi(t)$ 具有 2 阶导数, 且 $\psi(1)=\dfrac{5}{2}$, $\psi'(1)=6$, 已知 $\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$, 求函数 $\psi(t)$.

***a.f*.e.*c*) 导数定义**

(1.6.5.3.1)1998 数一二

(3) 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$, 且当 $\Delta x\to 0$ 时, α 是 Δx 的高阶无穷小, $y(0)=\pi$, 则 $y(1)$ 等于 (　)

A. 2π.　　B. π.　　C. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.　　D. $\pi\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$.

(1.6.5.3.2)2018 数三

【例 4.1】(2018，数三) 设 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)(\Delta x\to 0)$, 且 $f(0)=2$,则 $f(1)=$_____.

***a.f.e.d*) 导数应用 (切法线、曲率)**

(1.6.5.4.1)1998 数二;880 第六章综合解答 19

设 $y=y(x)$ 是一向上凸的连续曲线, 其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$, 且此曲线上点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=x+1$, 求该曲线的方程, 并求函数 $y=y(x)$ 的极值.

(1.6.5.4.2)2009 数二

设 $y=y(x)$ 是区间 $(-\pi,\pi)$ 内过点 $\left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$ 的光滑曲线.当 $-\pi<x<0$ 时, 曲线上任一点处的法线都过原点; 当 $0\leqslant x<\pi$ 时, 函数 $y(x)$ 满足 $y''+y+x=0$.求 $y(x)$ 的表达式.

(1.6.5.4.3)2011 数二

设函数 $y(x)$ 具有二阶导数, 且曲线 l:$y=y(x)$ 与直线 $y=x$ 相切于原点.记 α 为曲线 l 在点 (x,y) 处切线的倾角, 若 $\frac{d\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 求 $y(x)$ 的表达式.

(1.6.5.4.4)2017 数二

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 内的可导函数, 且 $y(1)=0$.点 P 是曲线 $l:y=y(x)$ 上的任意一点, l 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$, 法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$.若 $X_P=Y_P$, 求 l 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

(1.6.5.4.5)2023 数二

设曲线 $L:y=y(x)(x>\mathrm{e})$ 经过点 $(\mathrm{e}^2,0)$,L 上任一点 $P(x,y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

(1) 求 $y(x)$;

(2) 在 L 上求一点，使该点处的切线与两坐标轴所围三角形的面积最小，并求此最小面积.

***a.f*.e.e) 变限积分**

(1.6.5.5.1)2007 数二

设 $f(x)$ 是区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上的单调、可导函数, 且满足 $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt=\int_0^x t\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}d$, 其中 f^{-1} 是 f 的反函数, 求 $f(x)$.

(1.6.5.5.2)2016 数三

设函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x f(x-t)dt=\int_0^x (x-t)f(t)dt+\mathrm{e}^{-x}-1$, 求 $f(x)$.

***a.f.e.f*) 定积分应用 (面积体积)**

(1.6.5.6.1)2009 数三

设曲线 $y=f(x)$, 其中 $f(x)$ 是可导函数, 且 $f(x)>0$.已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1$ 及 $x=t(t>1)$ 所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍,求该曲线的方程.

(1.6.5.6.2)2020 数二

设函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x)>0$.曲线 $y=f(x)(x\geqslant 0)$ 经过坐标原点 O, 其上任意一点 M 处的切线与 x 轴交于 T, 又 MP 垂直 x 轴于点 P.已知由曲线 $y=f(x)$, 直线 MP 以及 x 轴所围图形的面积与 ΔMTP 的面积之比恒为 3:2, 求满足上述条件的曲线的方程.

a.f.e.g) 多元微分

(1.6.5.7.1)2014 数一二三

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $z=f(\mathrm{e}^{x}\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}=(4z+\mathrm{e}^{x}\cos y)\mathrm{e}^{2x}$.若 $f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(1.6.5.7.2)2025 数一

18. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 2 阶导数, 记 $g(x,y)=f\left(\frac{x}{y}\right)$, 若 $g(x,y)$ 满足 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$,且 $g(x,y)=1$, $\left.\frac{\partial g}{\partial n}\right|_{(x,x)}=\frac{2}{x}$, 求 $f(u)$.

(1.6.5.7.3)2026 数一

设 $f(u)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内具有 3 阶连续导数, 且存在可微函数 $F(x,y)$ 使得

$$F(x,y)=\frac{f(xy)}{x^2y}\mathrm{d}x+\frac{f''(xy)}{xy^2}\mathrm{d}y(xy>0).$$

(1) 证明:$\dfrac{f''(u)}{u}-\dfrac{f(u)}{u}=C$, C 为常数;

(2) 设 $f(1)=1, f'(1)=-1, f''(1)=0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

***a.f.e.h*) 二重积分**

(1.6.5.8.1)2011 数三

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=1$, 且满足 $\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D_t $=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant t-x,0\leqslant x\leqslant t\mid (0<t\leqslant 1)$.求 $f(x)$ 的表达式.

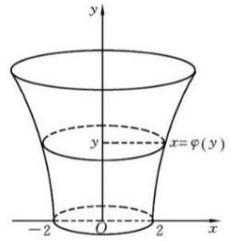
a.f.e.i) 物理及实际应用 (选做)

(1.6.5.9.1)2003 数二

有一平底容器, 其内侧壁是由曲线 $x=\varphi(y)(y\geqslant 0)$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面 (如图), 容器的底面圆的半径为 $2m$.根据设计要求, 当以 $3m^3/\min$ 的速率向容器内注入液体时, 液面的面积将以 $\pi m^2/\min$ 的速率均匀扩大 (假设注人液体前，容器内无液体).

(1) 根据 t 时刻液面的面积, 写出 t 与 $\varphi(y)$ 之间的关系式;

(2) 求曲线 $x=\varphi(y)$ 的方程. (注:m 表示长度单位米, min 表示时间单位分.)



(1.6.5.9.2)2015 数二

已知高温物体置于低温介质中, 任一时刻该物体温度对时间的变化率与该时刻物体和介质的温差成正比.现将一初始温度为 120°C 的物体在 20°C 恒温介质中冷却, 30min 后该物体温度降至 30°C, 若要将该物体的温度继续降至 21°C, 还需冷却多长时间.