考研数学大观

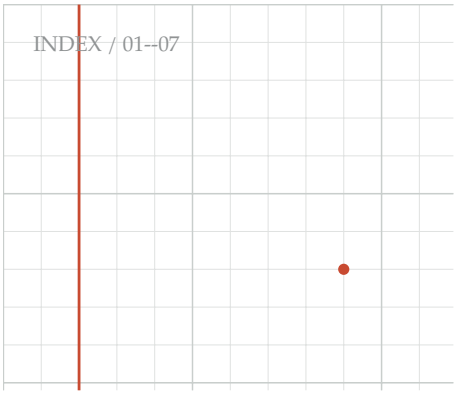
做题本

高等数学篇

A4 无留空版 · 函数极限连续

bilibili@澄潇宇

2027 考研数学大观



关于这份做题本

PLDY-DAGUAN / CALC-01

2026.07・@Kylaan 整理 /

内容范围

函数、极限与连续

编排说明

OCR 识别重构自澄潇宇大观 mn 源文件；保留题源、题号与原始图像索引。

如果遇到识别问题请参照勘误网址并联系

@Kylaan(liumq@mail.sdu.edu.cn)

勘误请参照：https://kylaan.github.io/pldy-daguan-export/

来源说明

个人学习资料汇编；题目版权归原出版物及原作者所有。

低头看路，抬头看天

序言

考研数学大观系列视频和题库由 澄潇宇（帕拉迪宇）精心制作。

特别感谢，南门朔、做题本聚集地、虎虎、上尉、$\alpha\beta\gamma\delta$ 等对大观系列的支持。

在传统的课程和习题册，有着重点不明、题型混乱和难度不均等缺点，并且单一题册无法覆盖所有题型和方法。这就要求大家想在考研稳定拿分，需要刷大量且重复的题目，自行总结归纳题型方法。但这需要很强的总结和复盘能力，普通考生是没有时间和精力去完成的，只能瞎猫碰上耗子，撞上一类是一类，这种学习方法不系统不科学。

那一夜，我思索良久：

有没有一种课程或者一种模式可以把相同题型、相似题目都放在了一起，再用系统和科学的思路串联起来。避免重复劳动，帮大家提升效率，方便大家复盘总结。

可惜，栏杆拍遍无人会。

我正是看到了传统课程和习题不可克服的局限性，选择了制作大观系列。

我敢为人先，费大力气大精力，用心做好大观。一次性帮你们解决一个专题的所有问题，让你们不用再东补西补，让你们不用再迷茫，课程讲的完整透彻，幽默风趣，训练素材足够科学条理，有正反馈，听得方便，练得方便，真正的做到系统和全面。

【何为大观】

大观题库包含历年所有真题，同时摘取 880、660、0.1w、900、150 等主流习题册中的题型变体，并进行了科学系统的分类。大观题库题目立足考试大纲，以真题为导向，辅以习题集题目。做到题型排布科学，难度循序渐进，与考试真题导向一致。同类题目排布在一起，做 1 题顶 10 题，避免重复劳动。刷一个大观相当于刷完了市面上你能见到的所有题型。同时大观配套了系统的视频讲解，可在哔哩哔哩搜索澄潇宇，即可免费获取。

我相信经过科学训练过后，大观系列将会成为你冲向考研战场最锋利的剑!!!

大观可以帮助你高频、科学的刺激大脑，高效掌握做题方法，快速学会如何做题。跟我学下来考研数学保 120 冲 140，帮大家用最少的时间，最高效的方法免费得到考研数学的高分，我想这就是一种自信。

——2026 年 6 月

澄潇宇 南门朔 虎虎

大观使用说明

学以致用、学而时习、循序渐进、持之以恒！

写大观，不需要再补充其他习题!!!

【大观何时用】

先看完一轮基础课，考研数学入门即可使用大观。大观完全可代替传统的强化和冲刺课程。

开大观的时机：

1.按模块，基础课后马上大观

2.先听完所有基础课，然后开大观

【大观观看顺序——专题训练】

微分系列（极限→一元微分→多元微分）放一起学；积分系列（积分计算→积分应用→二重积分）放一起学；微分方程独立学。按专题一个一个来，不要齐头并进。

先把高数吃透再学习概率、线代。时间精力主要放在高数，但要注意速度、时间，卡好大的时间节点，要确保考前能够完学完，完成必要的学习任务

数一三按照高数、概率、线代顺序推进，可学习概率同时复习高数，线代单独学。数二没有概率，其他同理。

【特别说明】

1. 关于极限大观

极限大观题目过多，存在瑕疵。极限大观只用掌握函数极限的运算以及定积分定义，二重积分定义求数列极限即可，太难的竞赛题考研应该不会考，可以跳过，大家一定要有选择的观看，赶紧推进到后面的重点专题大观，题目也一定要挑着做！不要挨个做！

2. 数一数二数三分别怎么学：

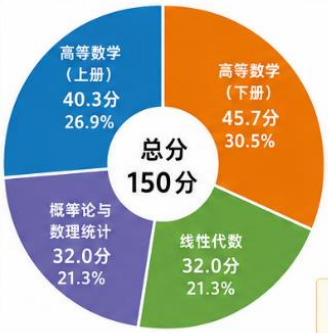
数一数二数三要以各自试卷的模块分值分布为参考，重点学习分值占比大的模块，简单学习分值占比小的模块。

比如：数二高数上占 80-90 分，要看视频也要大量做题库；而数一掌握视频讲过的题目即可，重点等后续级数和线面积分大观；数三推荐搜张风儿的经济应用大观补充。

数学一出题分值分布全景图（2021-2026年）

基于历年真题分值统计的可视化分析

一、数学一主干模块分值分布（历年平均）



模块分值汇总（历年平均）

一级科目模块	平均分值（分）	占比（%）
高等数学（上册）	40.3	26.9%
高等数学（下册）	45.7	30.5%
线性代数	32.0	21.3%
概率论与数理统计	32.0	21.3%
合计	150	100%

★ **核心结论：**
高等数学（下册）分值最高（45.7分），是数学一的核心得分区与难点集中区！

二、历年考察最重磅的 Top 10 高分核心二级考点（按历年平均分值）



三、数学一全景细分知识点历年出题分值分布（单位：分）

高等数学（上册）

具体知识板块	2026	2025	2024	2023	2022	2021	历年平均
函数极限连续	5	5	5	5	5	10	5.8
一元微分	10	10	5	10	10	15	10.0
一元积分	5	10	5	10	10	10	8.3
微分方程	6	6	5	10	5	5	6.2
证明题	12	12	12	12	12	0	10.0
小计（分）	38	43	32	47	42	40	40.3

高等数学（下册）

具体知识板块	2026	2025	2024	2023	2022	2021	历年平均
多元微分	25	13	12	10	17		13.2
二重积分	0	5	10	0	0		5.2
三重线面积分	22	22	21	17	17		18.7
级数	5	10	10	10	6		8.7
小计（分）	48	43	54	39	44		45.7

线性代数

具体知识板块	2026	2025	2024	2023	2022	2021	历年平均
行列式	0	0	0	0	0	5	0.8
矩阵	11	5	6	5	5	5	6.2
向量	6	5	5	10	5	5	6.0
方程组	5	13	5	0	5	0	4.7
特征	5	4	11	5	5	6	6.0
二次型	5	5	5	12	12	11	8.3
小计（分）	32	32	32	32	32	32	32.0

概率论与数理统计

具体知识板块	2026	2025	2024	2023	2022	2021	历年平均
事件与概率	0	5	5	0	5	5	3.3
一维随机变量	5	14	5	5	2	8	6.5
二维随机变量	3	0	9	8	0	0	3.3
数字特征	18	8	13	14	14	14	13.5
大数与中心极限	0	0	0	0	5	0	0.8
统计初步	6	5	0	5	6	5	4.5
小计（分）	32	32	32	32	32	32	32.0

注：表中数据为历年真题分值统计，平均分值 =（2021–2026年分值之和）÷ 6 。 红色标注为各模块中历年平均分值较高的核心考点。

数学二（数二）出题分值分布全景图（2021-2026年）

基于历年真实出题分值统计的可视化分析（全卷总分：150分）

一、主干模块分值分布（历年平均）

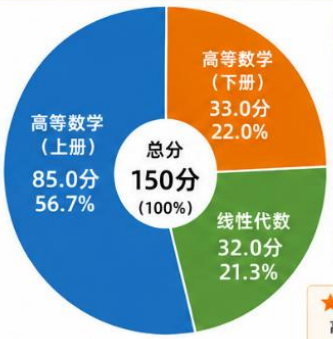


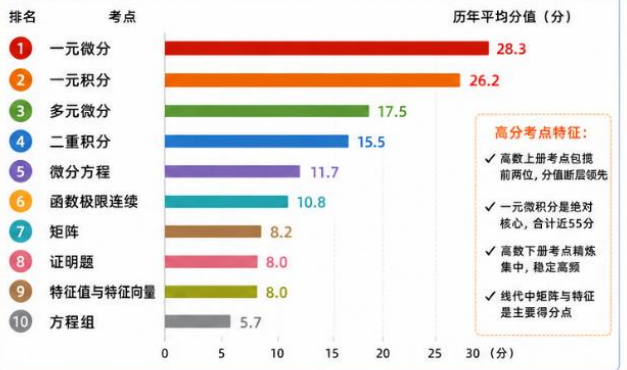
图 1：数学二三大支柱板块绝对平均分与全卷分值比例

模块分值汇总（历年平均）

一级科目模块	平均分值（分）	占比（%）
高等数学（上册）	85.0	56.7%
高等数学（下册）	33.0	22.0%
线性代数	32.0	21.3%
合计	150.0	100%

★ **核心结论：**
高数上册（85分）独占全卷56.7%，是数二得分的绝对命脉与核心制高点！

二、历年考察核心二级考点全景分值分布（降序）



三、数学二全景细分知识点历年出题分值数据库（单位：分）

高等数学（上册）

具体知识板块	2026	2025	2024	2023	2022	2021	历年平均
函数极限连续	10	5	10	10	15	15	10.8
一元微分	31	32	19	25	20	43	28.3
一元积分	23	25	29	32	26	22	26.2
证明题	0	12	12	12	12	0	8.0
微分方程	17	10	11	10	11	11	11.7
小计（分）	81	84	81	89	84	91	85.0

高等数学（下册）

具体知识板块	2026	2025	2024	2023	2022	2021	历年平均
多元微分	22	17	17	17	10		17.5
二重积分	15	17	15	12	17		15.5
小计（分）	37	34	37	29	34		33.0

线性代数

具体知识板块	2026	2025	2024	2023	2022	2021	历年平均
行列式	0	0	0	0	0	5	0.8
矩阵	16	5	10	8	5	5	8.2
向量	6	0	5	5	5	0	3.5
方程组	0	10	6	8	5	5	5.7
特征	5	15	5	6	5	12	8.0
二次型	5	2	6	5	12	5	5.8
小计（分）	32	32	32	32	32	32	32.0

注：表中数据为历年真实出题分值统计，平均分值 =（2021–2026年分值之和）÷ 6。 红色标注为各模块中历年平均分值较高的核心考点（平均分 ≥ 8分）。



【大观如何用】

按模块使用，两种用法：

①视频看完，再集中刷题（适合基础好、时间紧）

②看一个题型刷一个题型（**推荐**）

刷题方法：不需要全刷完，一类一类的刷，每个题型先刷母题（真题和重点题），会了就过，不会就接着练。要做到学一类、刷一类、会一类。通过二刷三刷后，看到题型就能出思路，出想法，这算是学到位了。

真题（红色、深蓝）>>>重点题（天蓝）>普通题（浅蓝）>神人题（灰色）

二刷方法：五级习题分类系统（详见下文），新学某个模块时，同时二刷上一个模块

真题套卷和模拟卷复盘：错题、不会的题、不熟的题，回到大观找同类题练习巩固

刷观流程：以每个大观的二级题型分类为节点（大概 20-40 分钟视频内容）

一、看视频（学做题）

了解题型、学解题思路

不要暂停做题，不要先刷再看

某个步骤、某个等号、个别难题没懂、可以暂停想想、算算

二、刷题（巩固吸收消化）

做一个题对一道答案

对完答案做好标注

不用每个题都刷

三、二刷三刷（巩固记忆，抗遗忘）

每个人不一样，每个题不一样

找自己合适的时间点：不能太短、不能太长

个人参考：一刷新大观时，穿插二刷刚学过的大观

【不同载体与工具使用推荐】

纸质：

打印 A4 无空版题本，在空白 A4/活页本写过程【推荐】

PC/平板看题，在空白 A4/活页本写过程（在活页本写步骤更容易归档查阅）

打印 A4 有空版做题本【页数多，打印贵】



考研数学大观题库打印链接

扫一扫二维码打开或分享给好友



- 腾讯文档 -

可多人实时在线编辑，权限安全可控

安卓平板和电脑端：

使用横版做题本做题、分块 PDF 或大观园网站查看答案

应用推荐：

安卓平板：starnote、享做笔记、Gurumind

PC、surface 平板：BookxNote+Onenote

苹果设备：应用商店下载 marginnote4，打开源文件

五级习题分类系统

作者：方十字学习体系

链接：https://mp.weixin.qq.com/s/NOSiiNCtzTAUK0k82aFsKQ

0 级:无法看懂题目条件或答案，思路。

下一步:在方便快捷的前提下查询学习资料，否则立即咨询各路 AI。若 0 级题目过多，则退回基础学习阶段，加强基础知识的理解。

1 级:首次看懂答案思路。

下一步:立即动笔独立解题（不许看懂了就跳过，必须动笔写），遇到卡壳的地方可以翻看答案或者学习资料，看完之后关闭资料继续独立解题，直至得出正确答案。

2 级:首次你模仿（不是抄写）着答案，动笔把题做对了。

具体到实际操作，就是你把答案看懂后，自己独立动笔做，哪块卡壳了，翻一下看看答案是咋做的，然后翻回来继续动笔做。这样能把题做对，就是 2 级。若时间充裕，最好进步到 2.5 级：

2.5 级：对于 1 级和 2 级题目（其它级别不适用），首次完成如下成就：在解题的过程中完全不翻看答案，并完整，正确的解出题目。（可以看完答案之后，合上答案立刻做一遍，只要解出来，并且过程中没有翻看答案，就算 2.5 级）

下一步:在首次学习新题目的前提下，直接开始学习下一道题目，无需回顾和重复

在复习的前提下，尝试对该级别题目进行升级。若升级失败，则维持原级别不变，等待下次升级。

3 级:首次你不翻看答案，仅通过翻看其他学习资料（公式定理啥的）动笔把题做对了。

具体到实际操作，就是你做着做着，有的公式没记住，翻一下书看看公式，但本轮学习中没有翻看答案，这样能动笔把题做对，就是 3 级。

下一步:在首次升至 3 级的前提下，开始学习下一道题目。

在复习的前提下，尝试对该级别题目进行升级。若升级失败，则维持原级别不变。

4 级:首次不查找任何资料，独立解题，动笔把题做对。

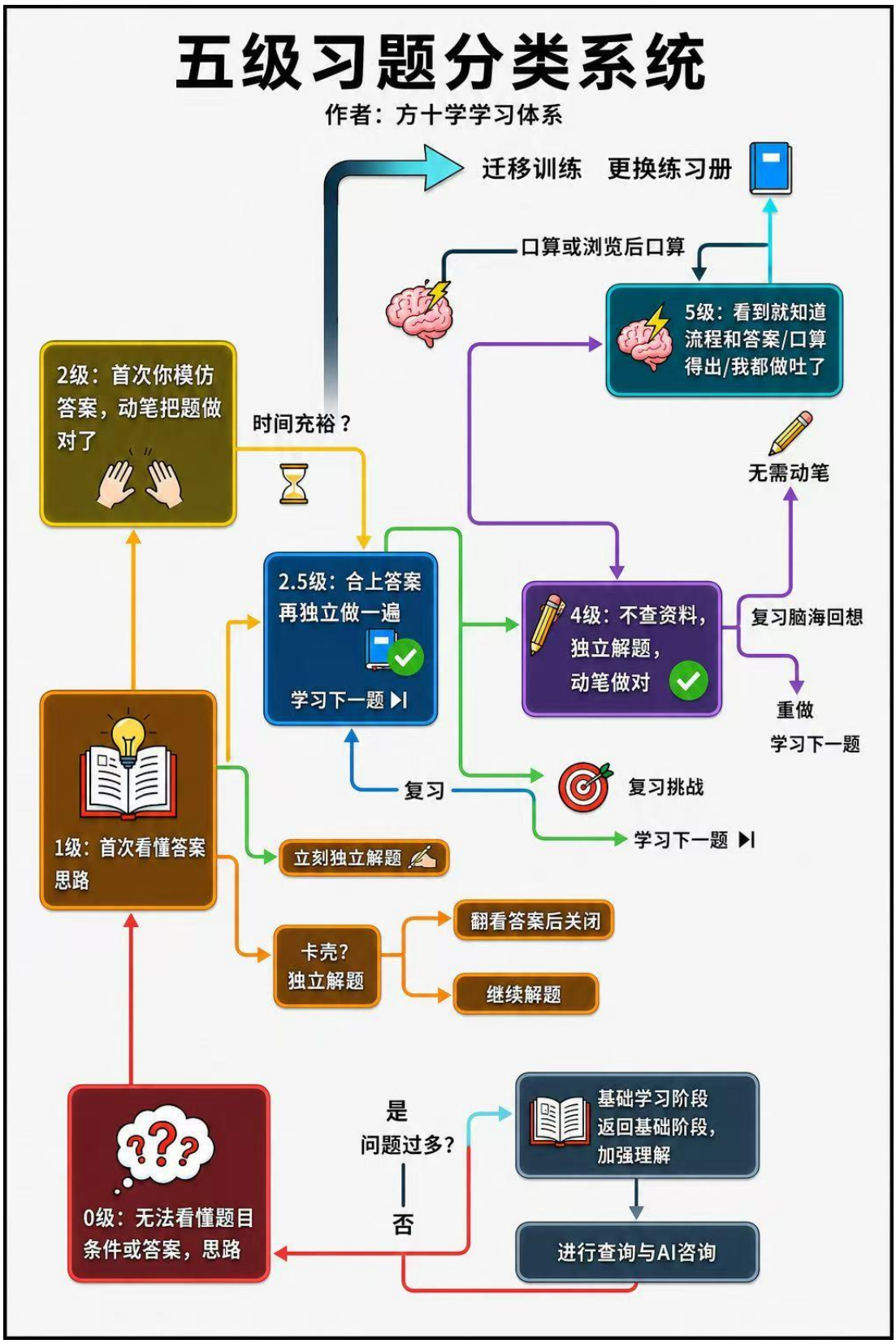
下一步:在首次升至 4 级的前提下，开始学习下一道题目。

在复习的前提下，可以扫一遍该级别题目，尝试在脑海中回想解题步骤。时间充裕的前提下也可以重新动手做一遍。注意：做错了无需降级，仅需重新解题至做对了为止。

5 级:这题你看到就知道解题流程和答案了/这题我都快做吐了。（首次口算，得出正确答案，或记忆该题目的全部详细的解题流程，甚至相关数值）

下一步:不论何时某题目达到 5 级，直接尝试口算该题目，或浏览答案后口算该题目，无需动笔。

当一本练习册以 5 级题目为主时，可以更换练习册，直接独立解题，进行迁移训练。


五级习题分类系统
作者：方十学学习体系
迁移训练 更换练习册
口算或浏览后口算
5级：看到就知道流程和答案/口算得出/我都做吐了
2级：首次你模仿答案，动笔把题做对了
时间充裕？
无需动笔
2.5级：合上答案再独立做一遍
学习下一题
4级：不查资料，独立解题，动笔做对
复习脑海回想
重做
学习下一题
复习
复习挑战
学习下一题
1级：首次看懂答案思路
立刻独立解题
卡壳？独立解题
翻看答案后关闭
继续解题
0级：无法看懂题目条件或答案，思路
是
问题过多？
否
基础学习阶段返回基础阶段，加强理解
进行查询与AI咨询

大观使用补充说明

关于交流问题

大家可以订阅一下帕拉迪岛，我是岛观王，和我一起海岛奇兵

订阅后可以免费获得以下福利：

1.免费便捷获取大观全套资料，后续持续更新，下载不限速

2.在岛内享受本人免费答疑

大家可以在知识区下载大观资料，问答区向我提问，小宇亲自解答考研万物，有问必答，欢迎大家踊跃提问



扫描二维码，大观使用补充持续更新

大观刷题计划：如何跳题，二刷节点



目录

第一章函数 · 极限 · 连续 1

1 函数 **1**
- 1.1 求函数表达式 . . . 1
- 1.2 函数性质考察 . . . 2

2 极限 **10**
- 2.1 函数极限概念题 . . . 10
- 2.2 极限计算 . . . 10
- 2.3 数列极限 . . . 55
- 2.4 已知极限相关 . . . 61
- 2.5 以极限形式给出的函数 . . . 76
- 2.6 根据含极限等式确定函数 . . . 79
- 2.7 无穷小阶数 . . . 79
- 2.8 渐近线 . . . 92
- 2.9 泰勒多项式 . . . 97

3 连续 **99**
- 3.1 判断或讨论连续性 . . . 99
- 3.2 已知连续确定参数 . . . 100
- 3.3 间断点 . . . 103

第一章函数 · 极限 · 连续

共 896 题

1　函数

1.1　求函数表达式

1.1-001 1988 数一二

已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域。

1.1-002 1990 数一二

设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$_____

1.1-003 2001 数二; 880 第一章基础填空 1

设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}=$_____

1.1-004 1992 数二; 26 版 660 数一二三第 119 题

设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-x)=$

A. $\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -x^2-x, & x>0.\end{cases}$　**B.** $\begin{cases}-x^2-x, & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$　**C.** $\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　**D.** $\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

1.1-005 1997 数二

设函数 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0;\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=(\quad)$

A. $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$　**B.** $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

C. $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$,　**D.** $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$,

1.1-006 26 版 660 数一二三第 1 题（重点）

设 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & |x|\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ x, & |x|>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}\arcsin x, & |x|\leqslant 1,\\ x, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[\varphi(x)]=$_____.

1.1-007 26 版 660 数三第 577 题

设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，则 $f[f(x)]=$_____.

1.1-008 26 版 660 数三第 576 题

设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的周期为 2 的奇函数，且当 $x\in(2,3)$ 时 $f(x)=x^2-x-1$，则当 $x\in[-2,0]$ 时 $f(x)=$_____。

1.1-009 26 版 1000 第一章基础 2

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)=x(x^2-4)$，若对任意的 x 都满足 $f(x)=-\dfrac{1}{2}f(x+2)$。写出 $f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上的表达式。

1.1-010 26 版 1000 第一章基础 3

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$ 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

1.1-011 26 版 1000 第一章基础 4

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，且 $f(x)=x$，$x\in[0,\pi)$，求 $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi)$ 上的表达式.

1.2 函数性质考察

1.2.1 单调

1.2.1-001 880 第一章基础选择 2

【2】设函数 $f(x)=\cos(\sin x)$，$g(x)=\sin(\cos x)$，则当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，（　　）。

A. $f(x)$ 单调增加，$g(x)$ 单调减少　　**B.** $f(x)$ 单调减少，$g(x)$ 单调增加

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调增加　　**D.** $f(x)$ 与 $g(x)$ 都单调减少

1.2.1-002 900 数二第一章 B 类 1

设 $f(x)$ 为 $[0,\pi]$ 上的连续函数，则下列命题中，正确的是（　　）

A. 若 $f(\operatorname{arccot}x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加.

B. 若 $f(\operatorname{arccot}x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加，则 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少.

C. 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加，则 $f(\operatorname{arccot}x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加.

D. 若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调增加，则 $f(\operatorname{arccot}x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调减少.

1.2.2 奇偶

1.2.2-001 2002 数二

设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是（　　）.

A. $\int_0^x f(t^2)\mathrm{d}t$　　**B.** $\int_0^x f^2(t)\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]\mathrm{d}t$　　**D.** $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t$

1.2.2-002 900 第三章数二 A 类 18

设函数 $f(x)$ 连续，则在下列变限积分定义的函数中，不能确定奇偶性的是 ()

A. $\int_0^x tf(t^2)\,dt$　　**B.** $\int_0^x tf^2(t)\,dt$

C. $\int_0^x t^2[f(t)-f(-t)]\,dt$　　**D.** $\int_0^x t^2[f(t^2)-f(-t^2)]\,dt$

1.2.2-003 2020 数三

【例 3.34】(2020，数三) 设奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有一阶连续导数，则【　】

A. $\int_0^x [\cos f(t)+f'(t)]\,dt$ 为奇函数　　**B.** $\int_0^x [\cos f(t)+f'(t)]\,dt$ 为偶函数

C. $\int_0^x [\cos f'(t)+f(t)]\,dt$ 为奇函数　　**D.** $\int_0^x [\cos f'(t)+f(t)]\,dt$ 为偶函数

1.2.2-004 25 版 1000 第八章基础 10

设 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上可导的奇函数，任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，均有 $f(x+1)-f(x)=f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，则以下是偶函数的是（　　）.

A. $\int_0^x [\sin f(t)+f(t+1)]\,\mathrm{d}t$　　**B.** $\int_0^x [\sin f'(t)+f'(t+1)]\,\mathrm{d}t$

C. $\int_0^x [\cos f(t)+f(t+2)]\,\mathrm{d}t$　　**D.** $\int_0^x [\cos f'(t)+f'(t+2)]\,\mathrm{d}t$

1.2.2-005 2024 数一

设 $f(x)=\int_0^x e^{\cos t}\mathrm{d}t$，$g(x)=\int_0^{\sin x} e^{t^2}\mathrm{d}t$，则下列正确的是

A. $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数　　**B.** $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数

C. $f(x),g(x)$ 均为奇函数　　**D.** $f(x),g(x)$ 均为周期函数

1.2.2-006 2024 数二

已知 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin t^3\,dt$，$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$，则（　　）

A. $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为奇函数　　**B.** $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数

C. $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为偶函数　　**D.** $f(x)$ 为偶函数，$g(x)$ 为奇函数

1.2.2-007 25 版 1000 第九章基础 15

设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是连续的偶函数，$a>0$，$g(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$，则在 $[-a,a]$ 上（　　）。

A. $g(x)$ 是单调递增函数
B. $g(x)$ 是单调递减函数
C. $g(x)$ 是偶函数
D. $g(x)$ 是奇函数

1.2.2-008 26 版 1000 第八章强化 7

设 $f(x)=\int_{0}^{|\sin x|}e^{t^2}dt$，$g(x)=\int_{0}^{|x|}\sin t^2dt$，则在 $(-\pi,\pi)$ 内，( ).

A. $f(x)$ 是可导的奇函数
B. $g(x)$ 是可导的偶函数
C. $f(x)$ 是奇函数且 $f'(0)$ 不存在
D. $g(x)$ 是偶函数且 $g'(0)$ 不存在

1.2.2-009 880 第二章综合选择 6

【6】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续的奇函数，$F(x)=\int_{0}^{|x|}f(t)\,\mathrm{d}t$，则正确的是（　　）。

A. $F(x)$ 是不可导的奇函数
B. $F(x)$ 是可导的偶函数
C. $F(x)$ 是不可导的偶函数
D. $F(x)$ 是可导的奇函数

1.2.2-010 880 第三章基础选择 2

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则（　　）。

A. 当 $f(x)$ 为奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数
B. 当 $f(x)$ 为偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数
C. 当 $f(x)$ 为周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数
D. 当 $f(x)$ 为单调函数时，$F(x)$ 必为单调函数

1.2.2-011 880 第一章综合选择 15

【15】设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内为连续的奇函数，a 为常数，则必为偶函数的是（　　）

A. $\int_{0}^{x}\mathrm{d}u\int_{a}^{u}tf(t)\mathrm{d}t$
B. $\int_{a}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}f(t)\mathrm{d}t$
C. $\int_{0}^{x}\mathrm{d}u\int_{a}^{u}f(t)\mathrm{d}t$
D. $\int_{a}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}tf(t)\mathrm{d}t$

1.2.2-012 24 版 1000 第八章 B 组 1

设 $f(u)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数，a 为常数，则下述积分为 x 的偶函数的是（　　）

A. $\int_{a}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}f\left(v^2\right)\mathrm{d}v$
B. $\int_{a}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}f\left(v^3\right)\mathrm{d}v$
C. $\int_{a}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}[f(v)]^2\mathrm{d}v$
D. $\int_{a}^{x}\mathrm{d}u\int_{0}^{u}[f(v)]^3\mathrm{d}v$

1.2.2-013 26 版 660 数二第 584 题

设 $f(u)$ 为连续的偶函数，a 是常数，则

A. $\int_{a}^{x}\left[\int_{0}^{u}tf(t)\,dt\right]du$ 必是奇函数
B. $\int_{0}^{x}\left[\int_{a}^{u}f(t)\,dt\right]du$ 必是奇函数

C. $\int_0^x \left[\int_a^u tf(t)\,dt\right] du$ 必是奇函数　　**D.** $\int_a^x \left[\int_0^u f(t)\,dt\right] du$ 必是奇函数

1.2.3 周期

1.2.3-001 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.1】设 $f(x)$ 为以 T 为周期的连续函数，则下列结论正确的个数是【　】

① $\int_0^x f(t)\,dt$ 以 T 为周期

② $\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ 以 T 为周期

③ 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 以 T 为周期

④ $\int_0^x \left[f(t)-f(-t)\right] dt$ 以 T 为周期

⑤ 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 以 T 为周期

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

1.2.3-002 25 版 1000 第八章强化 2

【2】设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数（若下式中用到 $f'(x)$，则设 $f'(x)$ 存在），则以下结论中不正确的是（　　）.

A. $f'(x)$ 必以 T 为周期　　**B.** $\int_0^x f(t)\,dt$ 必以 T 为周期

C. $\int_0^x [f(t)-f(-t)]\,dt$ 必以 T 为周期　　**D.** $\int_0^x f(t)\,dt - \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\,dt$ 必以 T 为周期

1.2.3-003 25 版 660 数一二三第 195 题

下列叙述错误的是

A. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续为奇函数，则 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的全体原函数为偶函数.

B. 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续为偶函数，则 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的全体原函数为奇函数.

C. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，以 T 为周期且为奇函数，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 也是以 T 为周期的函数.

D. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，以 T 为周期，又 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛，则 $\int_0^x f(t)\,dt$ 也是以 T 为周期的函数.

1.2.3-004 25 版 660 数一二三第 196 题

设 $f(x)$ 为以 T 为周期的非零连续函数，$\Phi(x)=\int_a^x \left[f(t)-f(-t)\right] dt$，$a$ 是常数，则

A. $\Phi(x)$ 是以 T 为周期的偶函数.　　**B.** $\Phi(x)$ 是以 T 为周期的奇函数.

C. $\Phi(x)$ 是偶函数，但不一定以 T 为周期.　　**D.** $\Phi(x)$ 是奇函数，但不一定以 T 为周期.

1.2.3-005 24 版 1000 第八章 C 组 1

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，下述命题中

(1) 对任意 a，$\int_{-a}^a f(x)\,dx=0$ 的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数；

(2) 对任意 a，$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ 的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数；

(3) 对任意 a，$\int_{a}^{x} f(t)\,dt$ 具有周期 T 的充要条件是 $f(x)$ 具有周期 T。

正确的个数为（　　）。

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

1.2.3-006 900 第三章数二 B 类 15

设定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 的图形关于 $x=0$ 与 $x=1$ 均对称，则下列命题中，正确命题为（）

① 若 $\int_{0}^{1} f(x)\,dx = 0$，则 $\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ 为周期函数。

② 若 $\int_{0}^{2} f(x)\,dx = 0$，则 $\int_{0}^{x} f(t)\,dt$ 为周期函数。

③ $\int_{0}^{x} f(t)\,dt - x\int_{0}^{2} f(t)\,dt$ 为周期函数。

④ $\int_{0}^{x} f(t)\,dt - \frac{x}{2}\int_{0}^{2} f(t)\,dt$ 为周期函数。

A. ②③　　**B.** ②④　　**C.** ①②③　　**D.** ①②④

1.2.3-007 24 版 1000 第八章 B 组 2

设 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数，$G(x) = 2\int_{0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_{0}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$，则（　　）。

A. $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 也是以 2 为周期的周期函数

B. $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数

C. $G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 是以 2 为周期的周期函数

D. $G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数，$G'(x)$ 也不是以 2 为周期的周期函数

1.2.3-008 25 版 1000 第九章基础 14

若连续周期函数 $y=f(x)$（不恒为常数）对任何 x，恒有 $\int_{-1}^{x+6} f(t)\,dt + \int_{x-3}^{4} f(t)\,dt = 14$ 成立，则 $f(x)$ 的周期是（　　）。

A. 7　　**B.** 8　　**C.** 9　　**D.** 10

1.2.3-009 26 版 660 数三第 616 题

设函数 $f(x)$ 满足 $f\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x)-f^2(x)}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f(x)$ 的周期为

A. 1　　**B.** $\frac{1}{2}$　　**C.** $\frac{1}{3}$　　**D.** $\frac{1}{4}$

1.2.3-010 26 版 1000 第八章强化 2

设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续奇函数，则 $\int_{a+(b+1)T}^{a+(b+2)T} f(x)\,dx$ 的取值（）。

A. 与 a,b,T 均有关　　**B.** 与 a,b,T 均无关

C. 只与 T 有关　　**D.** 只与 a,T 有关

1.2.4 有界

1.2.4-001 2004 数三

函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界（　　）.

A. $(-1,0)$　　**B.** $(0,1)$　　**C.** $(1,2)$　　**D.** $(2,3)$

1.2.4-002 900 数二第一章 A 类 1

在下列区间内，函数 $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{x(x-1)}$ 有界的是（　）

A. $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$　　**B.** $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　**C.** $(1,+\infty)$　　**D.** 以上都不正确

1.2.4-003 900 数二第一章 A 类 2

在下列区间内，函数 $f(x)=\dfrac{[1-\cos^2(x-4)]\sin(x-3)}{(x-4)^2(x-3)^2(x-2)}$ 有界的是（）

A. $(1,2)$　　**B.** $(2,3)$　　**C.** $(3,4)$　　**D.** $(4,5)$

1.2.4-004 姜晓千强化例题

【例 1.1】下列函数无界的是

A. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

B. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

C. $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,+\infty)$

D. $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt$，$x\in(0,2024)$

1.2.4-005 26 版 660 数二第 518 题

设 $f(x)=\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$x\neq0$。则

A. 存在某 $X>0$，在 $|x|\leqslant X$ 上 $f(x)$ 无界，但在 $|x|>X$ 上有界。

B. 存在某 $X>0$，在 $|x|\leqslant X$ 上 $f(x)$ 有界，但在 $|x|>X$ 上无界。

C. 对任意 $X>0$，在 $|x|\leqslant X$ 上 $f(x)$ 有界，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界。

D. 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)$ 有界。

1.2.4-006 880 第一章综合选择 17

【17】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x^3-1)\sin x}{|x|(1+x^2)}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x\in(-\infty,+\infty)$，则（　　）

A. $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

B. 存在 $X>0$，当 $|x|<X$ 时，$f(x)$ 有界，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 无界

C. 存在 $X>0$，当 $|x|<X$ 时，$f(x)$ 无界，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$ 有界

D. 对任意 $X>0$，当 $|x|\leqslant X$ 时，$f(x)$ 有界，但在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界

1.2.4-007 25 版 660 数一二三第 135 题

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x-1)}{(x-1)(x-2)}, & x\in(1,2)\cup(2,+\infty)\\ 0, & x=2\end{cases}$，则 $f(x)$

A. 在 $(1,2)$ 区间有界.　　**B.** 在 $(2,+\infty)$ 区间有界.

C. 在 $(1,+\infty)$ 区间有界.　　**D.** 在 $(1,2)$ 和 $(2,+\infty)$ 区间都无界.

1.2.4-008 26 版 660 数二第 519 题

设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，则“$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在”是“$f(x)$ 为 $[a,+\infty)$ 上的有界函数”的（　　）

A. 充分非必要条件　　**B.** 必要非充分条件

C. 充分必要条件　　**D.** 既非充分条件又非必要条件

1.2.5 综合

1.2.5-001 1990 数三

设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是（　）

A. 偶函数　　**B.** 无界函数　　**C.** 周期函数　　**D.** 单调函数

1.2.5-002 26 版 1000 第一章基础 1

函数 $f(x)=x^2\tan x\mathrm{e}^{\cos x}$ 是（　　）.

A. 有界函数　　**B.** 单调函数　　**C.** 周期函数　　**D.** 奇函数

1.2.5-003 1987 数二; 880 第一章基础选择 1

【1】函数 $f(x)=|x\sin x|\,\mathrm{e}^{\cos x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，是（　　）.

A. 单调函数　　**B.** 周期函数　　**C.** 偶函数　　**D.** 有界函数

1.2.5-004 880 第一章基础选择 3

【3】设函数 $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$，则（　　）

A. $f(x)$ 为偶函数　　**B.** $f(x)$ 为奇函数

C. $f(x)$ 为无界函数　　**D.** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$

1.2.5-005 26 版 660 数二第 517 题

设 $f(x)=x\tan\left(\dfrac{\pi}{6}e^{\sin x}\right)$，$x\in(-\infty,+\infty)$，则 $f(x)$ 是

A. 偶函数　　**B.** 无界函数　　**C.** 周期函数　　**D.** 单调函数

1.2.5-006 900 数二第一章 B 类 3

函数 $f(x)=x-[x]+|\sin x|$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 是（　　）

A. 周期函数　　**B.** 单调函数　　**C.** 奇函数　　**D.** 有界函数

1.2.5-007 900 数二第一章 A 类 3

下列命题中，正确的是（　　）

A. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不是连续函数，则 $f(x)+g(x)$ 也不是连续函数。

B. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都不是单调函数，则 $f(x)+g(x)$ 也不是单调函数。

C. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是无界函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是无界函数。

D. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是奇函数，则 $f(x)+g(x)$ 也是奇函数。

1.2.5-008 900 数二第一章 B 类 4

设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+4)-f(x)=f(2)$，则下列结论中，正确的个数为（

① 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)$ 为周期函数。

② 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)$ 为周期函数。

③ 若 $f(x)$ 为周期为 4 的函数，则 $f(x)$ 为奇函数。

④ 若 $f(x)$ 为周期为 4 的函数，则 $f(x)$ 为偶函数。

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

1.2.5-009 900 数二第一章 A 类 60

设函数 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的奇函数，且满足 $f(a-x)=f(a+x)$，其中 $a>0$。

证明：

(I) $f(x)$ 为周期函数；

(II) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界。

1.2.5-010 900 数二第一章 B 类 18

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\arctan\dfrac{1}{1+\sin^n x}$，则下列关于 $f(x)$ 的命题中，正确的是（）

① $f(x)$ 是周期为 2π 的奇函数.

② $f(x)$ 有无穷多个可去间断点.

③ $f(x)$ 有无穷多个跳跃间断点.

④ $f(x)$ 的最小值小于 $\dfrac{\pi}{6}$.

A. ①②.　　**B.** ③④.　　**C.** ①④.　　**D.** ②④.

1.2.5-011 900 第三章数二 A 类 19

设函数 $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(x-t)\,dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则下列命题中，正确的是（　）

① 若 $f(x)$ 为单调减少函数，则 $F(x)$ 为单调减少函数。

② 若 $f(x)$ 为单调减少函数，则 $F(x)$ 为单调增加函数。

③ 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为奇函数。

④ 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(x)$ 为偶函数。

A. ①③　　**B.** ①④　　**C.** ②③　　**D.** ②④

1.2.5-012 26 版 1000 第八章强化 6

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，令 $F(x)=\int_0^x\sin(x-t)f(t)\,dt$，则 $F(x)$ 一定为（）.

A. 偶函数　　**B.** 奇函数

C. 以 π 为最小正周期的周期函数　　**D.** 以 2π 为最小正周期的周期函数

2 极限

2.1 函数极限概念题

2.1-001 26 版 660 数二第 509 题

下列命题正确的是

A. 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则必存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$f(x)$ 必存在.

B. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，则必存在 $\delta>0$，当 $x\in \mathring{U}_\delta(x_0)$ 时，$f(x)$ 亦连续.

C. 设 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的间断点，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必不存在.

D. 设 $f(x_0)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 必不存在.

2.1-002 姜晓千基础例题（选做）

【例 1.6】设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则下列命题错误的是【　】

A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$

B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$，则存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\geq g(x)$

C. 若存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)>g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

D. 若存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$f(x)\geq g(x)$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geq\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2.1-003 26 版 660 数三第 619 题（选做）

下列命题中正确的是

A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Rightarrow$ 存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\geqslant g(x)$。

B. 若存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A_0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B_0$ 均存在，则 $A_0>B_0$。

C. 若存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>g(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\geqslant\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$。

D. 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\Rightarrow$ 存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>g(x)$。

2.2 极限计算

2.2.1 函数极限

▶ 2.2.1.1 0/0

2.2.1.1-001 1991 数二

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$。

2.2.1.1-002 1992 数一

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

2.2.1.1-003 26 版 660 数一二三第 140 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}-1}=$

A. $\dfrac{2}{3}$　　**B.** 1　　**C.** $\dfrac{3}{2}$　　**D.** 2

2.2.1.1-004 880 第一章综合填空 2

极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})\sin x^2}{\dfrac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}=$_____

2.2.1.1-005 1992 数二

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^x-\cos x}=$_____

2.2.1.1-006 1995 数二

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

2.2.1.1-007 1997 数一

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$_____

2.2.1.1-008 1998 数一二

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$_____

2.2.1.1-009 1999 数二

求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

2.2.1.1-010 26 版 1000 第一章基础 14

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}=$_____.

2.2.1.1-011 26 版 660 数一二三第 6 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}}{e^x-1}=$_____.

2.2.1.1-012 26 版 660 数一二三第 144 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\dfrac{x}{2}}=$

A. 4　　**B.** -4　　**C.** 6　　**D.** -6

2.2.1.1-013 2000 数二

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$_____

2.2.1.1-014 2001 数二

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$_____

2.2.1.1-015 2002 数二

(3) 设 $y=y(x)$ 是二阶常系数微分方程 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$ 满足初始条件 $y(0)=y'(0)=0$ 的特解，则当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}$ 的极限（　　）.

A. 不存在　　**B.** 等于 1　　**C.** 等于 2　　**D.** 等于 3

2.2.1.1-016 880 第一章综合选择 4

【4】设 $y=y(x)$ 是方程 $y''+2y'+y=e^{3x}$ 的解，且满足 $y(0)=y'(0)=0$，则当 $x\to 0$ 时，与 $y(x)$ 为等价无穷小的是（　　）.

A. $\sin x^2$　　**B.** $\sin x$　　**C.** $\ln(1+x^2)$　　**D.** $\ln\sqrt{1+x^2}$

2.2.1.1-017 2004 数二

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

2.2.1.1-018 2006 数一

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$_____

2.2.1.1-019 2007 数二

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$_____

2.2.1.1-020 2008 数一二; 26 版 660 数一二三第 129 题

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

2.2.1.1-021 2008 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\sin x}{x}$.

2.2.1.1-022 2009 数二

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

2.2.1.1-023 2011 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$。

2.2.1.1-024 2009 数三

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$_____

2.2.1.1-025 2012 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$。

2.2.1.1-026 880 第一章基础填空 6

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{\mathrm{e}^{x^4}-1}=$_____

2.2.1.1-027 880 第一章基础解答 5-5

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{x^3}$

2.2.1.1-028 2014 数二

(5) 设函数 $f(x)=\arctan x$. 若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$（　　）

A. 1.　　**B.** $\dfrac{2}{3}$.　　**C.** $\dfrac{1}{2}$.　　**D.** $\dfrac{1}{3}$.

2.2.1.1-029 900 数二第一章 B 类 25

设函数 $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$,若在 $x=0$ 的邻域内存在函数 $\xi=\xi(x)$,使得 $f(x)=x^2f'(\xi)$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2-1}{x}=$_____。

2.2.1.1-030 2015 数一三

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$_____

2.2.1.1-031 1988 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$。

2.2.1.1-032 2025 数一

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-1}{\ln x\cdot\ln(1-x)}=$_____.

2.2.1.1-033 26 版 660 数二第 587 题

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=$$

A. -2　　**B.** -1　　**C.** 1　　**D.** 2

2.2.1.1-034 26 版 660 数二第 440 题

$$I=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\arctan x}=_____.$$

2.2.1.1-035 26 版 660 数一二三第 143 题

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=$$

A. $\dfrac{\mathrm{e}}{2}$　　**B.** $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$　　**C.** e　　**D.** $-\mathrm{e}$

2.2.1.1-036 880 第一章基础解答 5-4

求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{x}}-\mathrm{e}^3}{x}$；

2.2.1.1-037 26 版 660 数一二三第 8 题

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}=_____.$$

2.2.1.1-038 26 版 660 数一二三第 142 题

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=$$

A. $\dfrac{1}{2}$　　**B.** $-\dfrac{1}{2}$　　**C.** $\dfrac{1}{6}$　　**D.** $-\dfrac{1}{6}$

2.2.1.1-039 姜晓千基础例题（重点）

【例 1.26】求下列极限：(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan 2x-\arctan x}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}$；(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\arctan 2x-\arctan x}{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$。

2.2.1.1-040 姜晓千真题同源 150; 26 版 660 数二第 431 题（重点）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x-\sin\tan x}{x^2(\sqrt{1+x}-e^x)}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sin x-\cos\tan x}{x^3(\sqrt{1+x}-e^x)}$；

(3) (莫斯科 1977 年竞赛题) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan\tan x-\sin\sin x}{\tan x-\sin x}$.

2.2.1.1-041 全国大学生 2021 年竞赛题（重点）

【例 1.11】(全国大学生 2021 年竞赛题) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x},$$

其中 n 为正整数.

2.2.1.1-042 900 数二第一章 A 类 55; 26 版 660 数一二三第 139 题（重点）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{x^2}$。

2.2.1.1-043 880 第一章基础解答 5-3

求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin^2 x+\mathrm{e}^x\right)-x}{\ln\left(\mathrm{e}^{2x}-x^2\right)-2x};$$

2.2.1.1-044 26 版 660 数一二三第 10 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}=$ _____.

2.2.1.1-045 900 数二第一章 A 类 43

已知函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\left[xf(x)\right]}{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)f(x)}=$_____。

2.2.1.1-046 900 数二第一章 A 类 53

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-x\tan^2 x-\tan x}$.

2.2.1.1-047 900 数二第一章 A 类 54

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin\left(xe^{-x}\right)}{\sin x\ln(x+1)}$.

2.2.1.1-048 900 数二第一章 A 类 29

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x\cot x}{\sin x\tan x}=$ _____.

2.2.1.1-049 900 数二第一章 A 类 31

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x-\sqrt{\cos x})\sin(\sin x)}{[x-\ln(1+\tan x)](e^x-1)}=$_____.

2.2.1.1-050 26 版 660 数一二三第 122 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{(1-\cos x)\sin^2 x}=$

A. 1　　**B.** $\dfrac{1}{2}$　　**C.** $\dfrac{1}{3}$　　**D.** 0

2.2.1.1-051 26 版 660 数一二三第 124 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-\cos x)}{\tan x\cdot\ln(1+x^2)}=$

A. 2　　**B.** $\dfrac{1}{2}$　　**C.** 1　　**D.** 0

2.2.1.1-052 26 版 660 数三第 578 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2}=$ _____.

2.2.1.1-053 26 版 660 数一二三第 123 题

$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}=$

A. $\dfrac{1}{2\pi}$　　**B.** $-\dfrac{1}{2\pi}$　　**C.** 2π　　**D.** -2π

2.2.1.1-054 26 版 660 数一二三第 12 题

$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x^2-2(1-\cos x)\sin x}{x^4}=$_____.

2.2.1.1-055 25 版 660 数一二三第 22 题

设 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$，且满足 $a=-4c\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=$_____。

2.2.1.1-056 26 版 1000 第一章基础 11

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\left(x-\dfrac{5}{2}x^2\right)}{x^2}=$_____.

2.2.1.1-057 880 第一章综合填空 11

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2+xy+x^2-x=0$ 确定，且 $y(1)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)^2}{1+y(x)}=$_____

▶ 2.2.1.2 ∞/∞

2.2.1.2-001 1991 数二

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$_____

2.2.1.2-002 1997 数二

求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$。

2.2.1.2-003 26 版 660 数一二三第 141 题

141 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x+1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}=$

A. 3　　**B.** 2　　**C.** 1　　**D.** 0

2.2.1.2-004 2007 数三

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$_____.

2.2.1.2-005 880 第一章基础填空 5

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x^2+1}{\mathrm{e}^x+x^3}(\sin x+\cos x)=$_____

2.2.1.2-006 900 数二第一章 A 类 30（重点）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt{x}}{\ln(e^x+x^3)}=$_____.

2.2.1.2-007 26 版 660 数二第 439 题（重点）

$I=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{2x}}{1+x^2\left(\mathrm{e}^x+1\right)^2}=$_____.

2.2.1.2-008 姜晓千基础例题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln(1+2^x)}{x+\ln(1+3^x)}=_____.$$

2.2.1.2-009 880 第一章基础解答 5-1

求极限：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sin x}{x^2+x\sin\frac{1}{x}}$$

2.2.1.2-010 26 版 660 数二第 514 题

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}$$

A. 不存在.　**B.** $=0$.　**C.** $=1$.　**D.** $=e$.

2.2.1.2-011 26 版 660 数一二三第 9 题

设常数 $a>0$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^x}{1+a^x}=$_____。

2.2.1.2-012 26 版 660 数一二三第 137 题

设 m、n 为某两正数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^ne^{-x}+x^{-m}\ln x)=$

A. 0　**B.** 1　**C.** $\dfrac{1}{2}$　**D.** 2

2.2.1.2-013 26 版 660 数一二三第 7 题

设 $\alpha>0,\beta>0$ 为常数，则 $I=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta x}=$_____.

▶ 2.2.1.3 0×∞

2.2.1.3-001 1993 数二

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=_____$$

2.2.1.3-002 1989 数二

$$\lim_{x\to0}x\cot2x=_____$$

2.2.1.3-003 26 版 660 数三第 617 题

$$\lim_{x\to1}(1-x^2)\tan\frac{\pi}{2}x=$$

A. 1　**B.** $\dfrac{2}{\pi}$　**C.** $\dfrac{4}{\pi}$　**D.** $\dfrac{6}{\pi}$

2.2.1.3-004 1993 数三

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=_____$$

2.2.1.3-005 2005 数三

极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$_____.

2.2.1.3-006 1993 数二

求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$.

2.2.1.3-007 1994 数一; 880 第一章基础解答 5-6; 26 版 660 数三第 579 题

$\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$_____

2.2.1.3-008 1996 数二

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left\{\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right]-\sin\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]\right\}=$_____

2.2.1.3-009 2018 数二

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2[\arctan(x+1)-\arctan x]=$_____

2.2.1.3-010 25 版 660 数一二三第 12 题

数列极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\arctan\dfrac{2}{n}-\arctan\dfrac{2}{n+1}\right)=$_____.

2.2.1.3-011 25 版 660 数一二三第 10 题

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x+1}}\right)=$_____.

2.2.1.3-012 26 版 1000 第一章基础 10

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x}}\right)=$_____.

2.2.1.3-013 880 第一章综合解答 11

求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left[\mathrm{e}^{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\mathrm{e}x}\right]$.

2.2.1.3-014 26 版 660 数二第 436 题

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]=$_____.

2.2.1.3-015 2023 数三

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2-x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)=$_____

2.2.1.3-016 姜晓千强化例题（重点）

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1}\right)=$_____.

2.2.1.3-017 姜晓千基础例题

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan 2x^2\right)=$_____.

$\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{x}{1+x}\right)=$_____.

2.2.1.3-018 26 版 660 数一二三第 130 题

当 $x\to+\infty$ 时，函数 $(\pi-2\arctan x)\ln x$ 的极限

A. 不存在。　**B.** 等于 -1。　**C.** 等于 0。　**D.** 等于 1。

2.2.1.3-019 26 版 1000 第一章基础 15

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)=$_____.

2.2.1.3-020 900 数二第一章 B 类 31（选做）

计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x+2\sqrt{x}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2}\right)$.

▶ 2.2.1.4 $\infty-\infty$

2.2.1.4-001 1990 数三

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$_____.

2.2.1.4-002 北京市 1997 年竞赛题

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=$_____.

2.2.1.4-003 25 版 660 数一二三第 5 题

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$_____.

2.2.1.4-004 26 版 660 数二第 429 题

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)=$_____.

2.2.1.4-005 900 数二第一章 A 类 35

$\lim\limits_{x\to1^-}\left(\sqrt{\dfrac{1}{1-x}+100}-\sqrt{\dfrac{1}{1-x}-100}\right)=$_____.

2.2.1.4-006 880 第一章基础解答 6-2

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]$。

2.2.1.4-007 26 版 660 数一二三第 138 题

138 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)}-x\right]=$

A. $\dfrac{1}{3}(a+b+c)$　　**B.** $\dfrac{1}{2}(a+b)$　　**C.** $\max\{a,b,c\}$　　**D.** $\min\{a,b,c\}$

2.2.1.4-008 1987 数二

求极限. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

2.2.1.4-009 1999 数一

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$_____

2.2.1.4-010 26 版 1000 第一章强化 15

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2x}\right)=$_____.

2.2.1.4-011 2004 数三

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

2.2.1.4-012 2005 数三

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

2.2.1.4-013 2020 数一

$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]=$_____

2.2.1.4-014 姜晓千真题同源 150; 26 版 1000 第一章强化 14（重点）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\dfrac{x}{e}\right]$.

2.2.1.4-015 姜晓千基础例题

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$_____.

2.2.1.4-016 25 版 660 数一二三第 133 题

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}=$$

A. 0　　**B.** $e^{-\frac{1}{4}}$　　**C.** $e^{-\frac{1}{3}}$　　**D.** $e^{-\frac{1}{2}}$

2.2.1.4-017 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.12】(I) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}-\dfrac{1}{\ln(1+x)}\right]$;

(II) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x)}\right]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$。

2.2.1.4-018 26 版 660 数一二三第 127 题

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\cot x\right)=$$

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.2.1.4-019 900 数二第一章 A 类 36

$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{1-\cos2x}-\dfrac{1}{2\ln(1+x^2)}\right]=$_____.

2.2.1.4-020 姜晓千强化例题

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.

2.2.1.4-021 26 版 660 数三第 618 题

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2e^{\frac{1}{n}}-\frac{n^3}{n-1}\right)=$$

A. 2　　**B.** -2　　**C.** $\dfrac{1}{2}$　　**D.** $-\dfrac{1}{2}$

▶ 2.2.1.5 0 的 0 次或 ∞ 的 0 次

2.2.1.5-001 1988 数二

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$_____

2.2.1.5-002 900 数二第一章 A 类 37

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=$_____.

2.2.1.5-003 880 第一章基础解答 5-8

求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$。

2.2.1.5-004 2010 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

2.2.1.5-005 26 版 1000 第一章强化 3

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{2}{x}}-1\right)^{\frac{2}{\ln x}}=$_____.

2.2.1.5-006 25 版 660 数一二三第 8 题（重点）

$I=\lim\limits_{x\to\infty}(\mathrm{e}^{x^2}+x^3)^{\frac{1}{x^2}}=$_____。

2.2.1.5-007 25 版 660 数一二三第 11 题

设 $\alpha>0$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+x)^{x^\alpha}=$_____。

2.2.1.5-008 姜晓千基础例题

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=$_____;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=$_____.

▶ 2.2.1.6 1 的 ∞

2.2.1.6-001 1987 数二

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$_____

2.2.1.6-002 1990 数一二

设 a 是非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$_____

2.2.1.6-003 北京竞赛

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+a^{2x}+\cdots+a^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}\ (a>0,n\in N).$

2.2.1.6-004 1991 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数。

2.2.1.6-005 姜晓千基础例题

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 均为正数。

2.2.1.6-006 880 第一章基础解答 5-2

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}+c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$　$(a,b,c$ 为正数$)$;

2.2.1.6-007 2011 数二

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$_____

2.2.1.6-008 1987 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$.

2.2.1.6-009 1994 数二

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

2.2.1.6-010 1989 数二

求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

2.2.1.6-011 1989 数三

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

2.2.1.6-012 26 版 1000 第一章基础 16

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$_____.

2.2.1.6-013 1993 数一; 25 版 660 数一二三第 4 题

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

2.2.1.6-014 1991 数一

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

2.2.1.6-015 1992 数二

求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

2.2.1.6-016 1995 数一

$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$_____

2.2.1.6-017 1998 数三

设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$_____。

2.2.1.6-018 26 版 660 数二第 442 题

对于任意 x，存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $\mathrm{e}^x=1+x+\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{\theta x}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\theta=$_____。

2.2.1.6-019 2002 数三; 880 第一章综合填空 6

设常数 $a\neq\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\dfrac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^{n}=$____.

2.2.1.6-020 2003 数一

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$_____

2.2.1.6-021 2010 数一

（1）极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}=$（　　）

A. 1.　　**B.** e.　　**C.** e^{a-b}.　　**D.** e^{b-a}.

2.2.1.6-022 2011 数一

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}}$.

2.2.1.6-023 2013 数二

$\lim\limits_{x\to 0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$_____

2.2.1.6-024 2012 数三

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$_____

2.2.1.6-025 2016 数二三

求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

2.2.1.6-026 2019 数二

$\lim\limits_{x\to0}(x+2^x)^{\frac{2}{x}}=$_____

2.2.1.6-027 2019 数三

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right]^n=$_____

2.2.1.6-028 26 版 660 数二第 437 题

设 $x_n=\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2(1+2+\cdots+k)}\right)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$_____。

2.2.1.6-029 900 数二第一章 A 类 48（选做）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n}{(n+1)!}\right]^{2n\cdot n!}=$_____.

2.2.1.6-030 2022 数二三

$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$_____

2.2.1.6-031 26 版 660 数一二三第 121 题

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

A. $=0$　**B.** $=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$　**C.** $=1$　**D.** 不存在

2.2.1.6-032 26 版 1000 第二章基础 1

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4}{\pi}\arctan\dfrac{n}{n+1}\right)^n=$（　）.

A. $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$　**B.** $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$　**C.** $\dfrac{\pi}{2}$　**D.** $\dfrac{2}{\pi}$

2.2.1.6-033 26 版 660 数二第 513 题

设 $a\neq n\pi$（n 为整数），则 $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{a}{\sin x-\sin a}}=$

A. $e^{-\frac{1}{\sin a}}$　**B.** $e^{\frac{1}{\sin a}}$　**C.** $e^{-\frac{a}{\sin a}}$　**D.** $e^{\frac{a}{\sin a}}$

2.2.1.6-034 880 第一章基础解答 5-7

求极限：$\lim\limits_{x\to0}(1-x^2)^{\frac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}}$

2.2.1.6-035 900 数二第一章 A 类 32

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+4}{x^2+2x+3}\right)^{x^2\sin\frac{2}{x}}=$_____.

2.2.1.6-036 900 数二第一章 A 类 33

$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x-\ln(1+x)}}=$_____.

2.2.1.6-037 900 数二第一章 A 类 34

设函数 $f(x)=\int_0^x \sin x\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{f(x)}}=$_____。

2.2.1.6-038 26 版 660 数二第 430 题

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{x}-1\right)^{\tan x}=$ _____.

2.2.1.6-039 26 版 660 数二第 432 题

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=$ _____.

2.2.1.6-040 26 版 660 数一二三第 128 题

$\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}=$

A. $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　**B.** 1　**C.** $\dfrac{1}{2}$　**D.** $-\dfrac{1}{2}$

2.2.1.6-041 26 版 660 数一二三第 125 题

$\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-x)^{\frac{1}{x^2}}=$

A. $\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$　**B.** $\sqrt{\mathrm{e}}$　**C.** 1　**D.** 0

2.2.1.6-042 26 版 660 数一二三第 126 题

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$

A. $e^{\frac{1}{2}}$　**B.** $e^{-\frac{1}{2}}$　**C.** $e^{-\frac{1}{6}}$　**D.** $e^{\frac{1}{6}}$

2.2.1.6-043 姜晓千基础例题

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

2.2.1.6-044 880 第一章基础解答 6-5

求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$$

2.2.1.6-045 26 版 660 数一二三第 145 题

$126\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n+\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\right]^n\right\}=$

A. -1　**B.** 1　**C.** e　**D.** $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}$

2.2.1.6-046 26 版 1000 第一章强化 1

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$_____.

2.2.1.6-047 26 版 1000 第一章基础 12

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-\sin x-\cos x}{1+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=$_____.

▶ 2.2.1.7 含 e 或绝对值的极限

2.2.1.7-001 1992 数一二

(1) 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 ( )

A. 等于 2.　　**B.** 等于 0.

C. 为 ∞.　　**D.** 不存在但不为 ∞.

2.2.1.7-002 2000 数一

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$。

2.2.1.7-003 25 版 660 数一二三第 18 题

设 a,b,p 为非零常数，则 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+b\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{a-b\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin px}{|x|}=$_____。

2.2.1.7-004 900 数二第一章 A 类 11

当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{2}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}-\dfrac{\tan(x-1)}{|x-1|}$ 的极限（　　）

A. 等于 -1　　**B.** 等于 1

C. 为 ∞　　**D.** 不存在但不为 ∞

2.2.1.7-005 25 版 660 数一二三第 129 题

$f(x)=\dfrac{\sin\pi x}{x-1}e^{\frac{1}{(x-1)^3}}$，则当 $x\to 1$ 时有

A. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\pi$　　**B.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$

C. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$　　**D.** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在，且 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)\neq\infty$

2.2.1.7-006 26 版 660 数一二三第 13 题

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}\arctan\frac{1}{x}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=$_____.

2.2.1.7-007 26 版 1000 第一章基础 9

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x-x\arctan x}{\mathrm{e}^x+x}=$(　).

A. 1　　**B.** $\dfrac{\pi}{2}$　　**C.** 0　　**D.** 不存在

▶ 2.2.1.8 利用导数定义求极限

2.2.1.8-001 1987 数二

（3）设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于（　　）

A. $f'(a)$　　**B.** $2f'(a)$　　**C.** 0　　**D.** $f'(2a)$

2.2.1.8-002 880 第二章基础选择 2

【2】设 $f'(x)$ 存在，a,b 为任意实数，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+a\Delta x)-f(x-b\Delta x)}{\Delta x}=$（　）。

A. $(a+b)f'(x)$　　**B.** $(a-b)f'(x)$　　**C.** $af'(x)$　　**D.** $bf'(x)$

2.2.1.8-003 1989 数一

已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$_____

2.2.1.8-004 880 第二章基础填空 2

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=2$，$f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\ln(1+x^2)}=$_____。

2.2.1.8-005 26 版 1000 第三章基础 1

设 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\ln(1-x\sin x)}=$_____.

2.2.1.8-006 1994 数三

已知 $f'(x_0)=-1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$_____.

2.2.1.8-007 26 版 660 数一二三第 22 题

设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且是偶函数，$f'(-2)=-1$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{f(5-2\sin h)-f(5)}=$_____.

2.2.1.8-008 2011 数二三

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（ ）

A. $-2f'(0)$.　　**B.** $-f'(0)$.　　**C.** $f'(0)$.　　**D.** 0.

2.2.1.8-009 26 版 1000 第三章基础 13

设 $f(x)$ 为在 $x=0$ 处可导的奇函数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(tx)-5f(x)}{x}=$_____.

2.2.1.8-010 25 版 660 数一二三第 150 题

设 $f(x)$ 是以 3 为周期的可导函数且 $f'(4)=1$，则 $I=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-3\tan h)}{h}$ 等于

A. 5　　**B.** 3　　**C.** 4　　**D.** 7

2.2.1.8-011 26 版 660 数一二三第 35 题

设 $f'(1)=1$，则 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+x)-f(1-2\sin x)}{x+2\sin x}=$_____。

2.2.1.8-012 2013 数一

设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)=$_____。

2.2.1.8-013 2013 数二

(2) 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $\cos xy+\ln y-x=1$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$（　）

A. 2　　**B.** 1　　**C.** -1　　**D.** -2

2.2.1.8-014 880 第二章基础填空 3

设 $y=f(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$_____。

2.2.1.8-015 26 版 1000 第四章强化 10

设 $x=x(y)$ 由方程 $y=\int_1^{x-y}\cos^2\left(\dfrac{\pi t}{4}\right)dt$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[nx\left(\dfrac{1}{n}\right)-n\right]=$_____.

2.2.1.8-016 2013 数三

设曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}nf\left(\dfrac{n}{n+2}\right)=$_____。

2.2.1.8-017 26 版 1000 第三章强化 15

已知 $(1,0)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上，且曲线在该点与 $y=\ln(2x^2-1)$ 有公共的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{n+1}{n}\right)-f\left(\dfrac{n+2}{n}\right)\right]=$_____.

2.2.1.8-018 26 版 660 数一二三第 165 题

设曲线 $y=f(x)$ 在原点与 $y=\sin x$ 相切，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot\sqrt{f\left(\dfrac{2}{n}\right)}=$

A. $-\sqrt{2}$　　**B.** -1　　**C.** 1　　**D.** $\sqrt{2}$

2.2.1.8-019 26 版 1000 第五章强化 25

设 $y=\tan^n x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线在 x 轴上的截距为 x_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n)=$_____.

2.2.1.8-020 全国大学生 2012 年竞赛题（重点）

【例 2.11】(全国大学生 2012 年竞赛题) 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(x)>0$。

若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距为 u，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$。

2.2.1.8-021 26 版 660 数二第 553 题

设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(x)>0$，又设 $u=u(x)$ 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{u(x)}=$

A. 1　　**B.** 2　　**C.** $\dfrac{1}{2}$　　**D.** 0

2.2.1.8-022 2024 数二

已知 $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=e^{t^2}\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[f\left(2+\dfrac{2}{x}\right)-f(2)\right]=$（　　）

A. $2e$　　**B.** $\dfrac{4}{3}e$　　**C.** $\dfrac{2}{3}e$　　**D.** $\dfrac{e}{3}$

2.2.1.8-023 880 第二章综合填空 11

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=4t-t^2\end{cases}$ $(t\geqslant 0)$ 确定，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)-3\right]=$_____。

2.2.1.8-024 900 数二第二章 B 类 32（重点）

设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，且在点 $(0,0)$ 处的曲率圆为 $(x+1)^2+(y+2)^2=5$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(-\dfrac{1}{n}\right)\right]=$____。

2.2.1.8-025 880 第二章综合填空 10

【10】设 $x=f(y)$ 是单调可导函数 $y=g(x)$ 的反函数，且 $g(1)=2$，$g'(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则

$\lim\limits_{y\to 2}\left[(y-2)\cdot\dfrac{f(y)-f(2)}{(\ln y-\ln 2)^2}\right]=$_____

2.2.1.8-026 26 版 1000 第三章强化 22

已知 $a_n=1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\sin\frac{1}{n^2}$，可导函数 $y=f(x)-\sin x$ 在 $x=0$ 处取得极值。计算 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-f(a_n)\right]$。

2.2.1.8-027 25 版 660 数一二三第 30 题

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导且 $f(0)=1$，$f'(0)=3$，则 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{\frac{1}{n}}{1-\cos\frac{1}{n}}}=$____。

2.2.1.8-028 26 版 660 数二第 448 题

设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，且 $f(x_0)=1$，$f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{h\to0}[f(x_0+h)]^{\frac{1}{h}}=$_____。

2.2.1.8-029 880 第二章综合填空 7; 26 版 1000 第三章强化 16

设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f(x_0)\neq0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{x}\right)}{f(x_0)}\right]^x=$_____。

2.2.1.8-030 26 版 660 数一二三第 34 题

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处二阶导数存在，则 $I=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)}{h}=$____.

2.2.1.8-031 26 版 1000 第六章基础 10

设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处一阶导数连续，且 $f'(1)=2$，则 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{\ln x}=$_____.

2.2.1.8-032 880 第二章基础解答 12

设 $f(x)$ 二阶可导，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，$f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$。

2.2.1.8-033 26 版 1000 第三章基础 4

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=f'(0)=\sqrt{2}$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f^2(x)-2}{x}=$_____.

2.2.1.8-034 26 版 1000 第三章基础 12

设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，$x_n=\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f(x_0-x_n)}{\sin\frac{1}{n}}=$_____.

2.2.1.8-035 26 版 1000 第三章基础 6

设可导函数 $f(x)>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\ln\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{f(0)}=$_____.

2.2.1.8-036 26 版 1000 第三章强化 6

设函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内有定义，$f(0)=f'(0)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-a}{\ln f(x)-\ln a}=(\quad)$。

A. $\dfrac{1}{a}$　　**B.** a　　**C.** $\cos a$　　**D.** $a\cos a$

2.2.1.8-037 26 版 660 数一二三第 15 题（重点）

设 $f''(a)$ 存在，$f'(a)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{1}{f'(a)(x-a)}-\dfrac{1}{f(x)-f(a)}\right]=$_____。

2.2.1.8-038 880 综合填空 12

设 $f''(1)$ 存在，$f'(1)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{f'(1)(x-1)}-\dfrac{1}{f(x)-f(1)}\right]=$_____。

▶ 2.2.1.9 三角有关

2.2.1.9-001 22 版 660（重点）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

2.2.1.9-002 26 版 660 数二第 443 题

数列极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}n\tan(\pi\sqrt{n^2+1})=$_____.

2.2.1.9-003 1800 第一章强化 2

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sin\pi\sqrt{n^2+n}=(\quad)$.

A. 0　　**B.** $\dfrac{1}{2}$　　**C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　**D.** 1

2.2.1.9-004 26 版 660 数二第 441 题

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=$_____.

2.2.1.9-005 900 数二第一章 A 类 39

$\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(1+x)-\sin\ln x]=$_____.

▶ 2.2.1.10 含变限积分的极限

▶ 2.2.1.10.1 x 趋于 0

2.2.1.10.1-001 1992 数三

（1）设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于（　　）

A. a^2　　**B.** $a^2f(a)$　　**C.** 0　　**D.** 不存在

2.2.1.10.1-002 1994 数三

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,dt$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{2n}}$。

2.2.1.10.1-003 2002 数三; 880 第三章基础填空 9

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,dt\right]du}{x(1-\cos x)}$

2.2.1.10.1-004 26 版 1000 第一章强化 6

设函数 $f(x)$ 在点 $x=3$ 的邻域内可微，且 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 3} f'(x)=4016$。求 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\int_3^x\left[t\int_t^3 f(s)\,ds\right]dt}{(3-x)^3}$。

2.2.1.10.1-005 2005 数二

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(x-t)f(t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}$。

2.2.1.10.1-006 900 第三章数二 B 类 45

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x(\sin x^2-\sin t^2)f(t)\,dt}{x\int_0^x tf(t^2)\,dt}$。

2.2.1.10.1-007 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.4】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处三阶可导，且 $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$，$f'''(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x tf(x-t)\,dt}{x\int_0^x f(x-t)\,dt}=$_____.

2.2.1.10.1-008 880 第三章综合解答 8

设 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(x)f(x-t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t}$。

2.2.1.10.1-009 26 版 1000 第一章强化 17

设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$。

2.2.1.10.1-010 900 第三章数二 B 类 32

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} t^2f(t)\,dt}{\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^2}=$_____.

2.2.1.10.1-011 900 第三章数二 B 类 33

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)=0$，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{\ln(1+x)} tf(t)\,dt}{\left[\int_0^x\sqrt{f(t)}\,dt\right]^2}=$_____。

2.2.1.10.1-012 2017 数二三

求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\sqrt{x-t}\,e^t\,dt}{\sqrt{x^3}}$.

2.2.1.10.1-013 26 版 1000 第一章强化 4

计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\left[\mathrm{e}^{(t-x)^2}-1\right]\sin t\,\mathrm{d}t}{x^2\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)}$。

2.2.1.10.1-014 2016 数一

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,dt}{1-\cos x^2}=$_____

2.2.1.10.1-015 880 第一章综合解答 9

计算极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[(3+2\tan t)^t-3^t\right]\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{3x^3}-1}$.

2.2.1.10.1-016 880 第三章综合解答 7

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2u^2}\,\mathrm{d}u-2x}{\sqrt{1+2x^3}-1}$.

2.2.1.10.1-017 880 第三章基础填空 8

极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^1 t\ln t\,\mathrm{d}t}{x^4}=$_____

2.2.1.10.1-018 25 版 660 数一二三第 9 题

$I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_{x^2}^x\frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{d}t}{x^2}=$_____.

2.2.1.10.1-019 2021 数一二

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\int_0^x\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

2.2.1.10.1-020 26 版 1000 第一章强化 16

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1+\int_0^x(1+t)^{\frac{1}{t}}\,dt}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right]$.

2.2.1.10.1-021 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.6】（I）设 $f(x),g(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$。证明：当 $x\to x_0$ 时，$\displaystyle\int_0^{\varphi(x)}f(t)\,dt\sim\int_0^{\varphi(x)}g(t)\,dt$；

（II）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{x^2}\ln(1+2\tan t)\,dt}{\left[\displaystyle\int_0^x\ln(1+2\tan t)\,dt\right]^2}$；

（III）设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)\left[\displaystyle\int_0^x e^{x-t}f(t)\,dt\right]^2}{(\tan x-\arcsin x)\sin x^2}$。

2.2.1.10.1-022 880 第三章综合解答 10（重点）

计算 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{2x}\left|1-\frac{t}{x}\right|\sin t\,\mathrm{d}t}{x^2}$.

2.2.1.10.1-023 880 第三章综合填空 2

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，若 $x_0 \in [a,b]$，$x \in [a,b]$，则极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x} [f(t+\Delta x) - f(t)]\mathrm{d}t =$ _____

2.2.1.10.1-024 900 第三章数二 B 类 34

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, f'(0)=1, F(x) = \int_0^x t^{2n-1} f\left(\sqrt[n]{x^{2n}-t^{2n}}\right) \mathrm{d}t$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{1-\cos x^{n+1}} =$_____。

2.2.1.10.1-025 880 第三章综合选择 7

设 $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{x-1} \int_1^x f(t)\mathrm{d}t$，$f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) =$ (　)。

A. 1　　**B.** $f(1)$　　**C.** 0　　**D.** 不存在

2.2.1.10.1-026 880 第三章基础填空 5

(III) 设 $F(x) = \int_0^x tf\left(x^2-t^2\right) \mathrm{d}t$，$f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{F(x)}{x^4} =$_____。

2.2.1.10.1-027 26 版 660 数二第 466 题

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \int_0^{x^2} \cos t^2 \,\mathrm{d}t}{\sin^{10} x} = _____.$$

2.2.1.10.1-028 26 版 660 数二第 478 题

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \left[\int_{2x-1}^{2x+1} e^{t^2}\, dt - \int_{-1}^{1} e^{t^2}\, dt\right] = _____.$$

2.2.1.10.1-029 880 第二章基础填空 12

【12】设连续函数 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处满足 $\Delta y = \Delta x + o(\Delta x)$，则极限 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_1^{e^x} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2 + \ln(1+x^3)} =$_____

2.2.1.10.1-030 26 版 1000 第一章强化 2

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1+\sin 2t)^{\frac{1}{t}}\, dt = _____.$$

2.2.1.10.1-031 26 版 1000 第一章强化 12

设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，$f(0)=\dfrac{1}{2}$，且函数 $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{2}, & x<0, \\ x+\dfrac{1}{2}, & x\geqslant 0, \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xf(x)+g(x)\int_0^{2x} \cos t^2\, dt}{xg(x)} =$ _____.

2.2.1.10.1-032 26 版 1000 第四章强化 3

设 $y=y(x)$ 是由方程 $y^3+xy+x^2-2x+1=0$ 确定并且满足 $y(1)=0$ 的函数，则 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^3}{\int_1^x y(t)\,dt} =$_____.

2.2.1.10.1-033 26 版 1000 第一章强化 18

设存在 $0<\theta<1$，使得 $\int_0^x e^t\,dt = xe^{\theta x}$，$x>0$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta =$_____.

2.2.1.10.1-034 900 数二第一章 A 类 56

已知函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数且 $f(0)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\int_0^{x^2} f(t)\,dt}-\dfrac{1}{x^2 f\left(x^2\right)}\right]$。

▶ 2.2.1.10.2 x 趋于 ∞

▶ 2.2.1.10.2.1 被积函数为周期函数

2.2.1.10.2.1-001 2000 数二

设函数 $S(x)=\int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t$.

(1) 当 n 为正整数，且 $n\pi\le x<(n+1)\pi$ 时，证明：$2n\le S(x)<2(n+1)$

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

2.2.1.10.2.1-002 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 3.23】

(1) 设 $f(x)$ 为以 T 为周期的非负可积函数，且 $\int_0^T f(x)\,dx=a$，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\frac{a}{T};$$

(2) (上海市 1991 年竞赛题) 设 $f(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$。

2.2.1.10.2.1-003 姜晓千真题同源 150（重点）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t\,|\cos t|\,\mathrm{d}t}{x^2}$。

2.2.1.10.2.1-004 880 第三章基础填空 10

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\sin t|\,\mathrm{d}t}{x}=$_____

▶ 2.2.1.10.2.2 其他

2.2.1.10.2.2-001 2014 数一二三

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$。

2.2.1.10.2.2-002 26 版 660 数二第 465 题（重点）

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\int_1^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x=$_____.

2.2.1.10.2.2-003 900 第三章数二 A 类 46（重点）

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\arctan n\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$_____.

2.2.1.10.2.2-004 900 第三章数二 B 类 35（重点）

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_{\frac{1}{x}}^x\sin xt\ln xt\,\mathrm{d}t}{\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}=$_____.

2.2.1.10.2.2-005 900 第三章数二 A 类 47

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_1^n\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}t}{\sqrt{1+n}}=_____.$$

2.2.1.10.2.2-006 880 综合解答 10

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^3}\int_1^x\left[(1+t^2)\sin\frac{1}{t}-\cos t\right]\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$$

▶ 2.2.1.11 二重变限积分求极限

2.2.1.11-001 江苏省 2008 年竞赛题; 姜晓千真题同源 150; 880 第五章综合解答 6（重点）

例 6.2 (1)(江苏省 2008 年竞赛题) 求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t^6}\int_0^t\mathrm{d}x\int_x^t\sin(xy)^2\mathrm{d}y$;(2) 求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t^3}\int_0^t\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t^2}\arctan(\cos(2x+3\sqrt{y}))\mathrm{d}y$。

2.2.1.11-002 880 第五章基础填空 14

设 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant t,0\leqslant y\leqslant t\}$，则 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{1}{t^2}\iint_D e^{(x+y)^2}\cos(x+y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$_____

2.2.1.11-003 880 第五章综合解答 10

设可导函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\int_0^t\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{t^2-x^2}}^{\sqrt{t^2-x^2}}\left[f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+2y\right]\mathrm{d}y}{t^3}$。

2.2.1.11-004 880 第五章综合解答 21

设 $D:x^2+y^2\leqslant2tx,y\geqslant0(t>0)$，$f(u)$ 在 $u=0$ 处可导，且 $f(0)=0$，求

$$\lim_{t\to0^+}\frac{1}{t^4}\iint_D f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2.2.1.11-005 880 第五章综合解答 13（选做）

【13】设 $f(x,y)$ 在区域：$0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$ 上连续，$f(0,0)=0$，且 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，$f'_y(0,0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\mathrm{d}t\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)\mathrm{d}u}{1-\mathrm{e}^{-\frac{x^4}{4}}}$。

▶ 2.2.1.12 含取整求极限

2.2.1.12-001 26 版 660 数一二三第 14 题

$[x]$ 表示 x 的最大整数部分，则 $\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{2}{x}\right]=$_____.

2.2.1.12-002 26 版 1000 第一章强化 32

设函数 $f(x)=x-[x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$。

▶ 2.2.1.13 极限运算的正误判断

2.2.1.13-001 1988 数三

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在。

2.2.1.13-002 26 版 660 数一二三第 133 题

已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5+f(x)}{x^2}=a$. 下列计算中，运算过程没有错误的是

A. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x+xf(x)}{x^3}\overset{①}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x+xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5+f(x)}{x^2}=a$

B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x+xf(x)}{x^3}\overset{②}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\sin5x}{x}+f(x)}{x^2}\overset{③}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5+f(x)}{x^2}=a$

C. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x+xf(x)}{x^3}\overset{④}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{x^3}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xf(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}\overset{⑤}{=}a$

D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x+xf(x)}{x^3}\overset{⑥}{=}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{5+f(x)}{x^2}-\dfrac{5x-\sin5x}{x^3}\right)\overset{⑦}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5+f(x)}{x^2}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x-\sin5x}{x^3}=$
$a-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x-\sin5x}{x^3}=a-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5-5\cos5x}{3x^2}=a-\dfrac{5}{3}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos5x}{x^2}=a-\dfrac{125}{6}$

2.2.1.13-003 26 版 660 数二第 507 题

以下极限等式 (若某端极限存在, 则另一端极限也存在且相等) 成立的是

A. 设 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=A$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{h(x)+g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{A+g(x)}$

B. 设 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\left(h(x)\cdot\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=0$

C. 设 $\lim\limits_{x\to a}h(x)=A\neq0$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{h(x)g(x)}=\dfrac{1}{A}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)}$

D. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}$

2.2.1.13-004 26 版 660 数二第 508 题

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则下列命题不正确的是

A. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=A+B$

B. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=A-B$

C. $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=AB$

D. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$

2.2.1.13-005 26 版 660 数一二三第 135 题

有以下命题：设 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a}g(x)$ 不存在，$\lim\limits_{x\to a}h(x)$ 不存在，
① $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))$ 不存在。
② $\lim\limits_{x\to a}(g(x)+h(x))$ 不存在。
③ $\lim\limits_{x\to a}(h(x)\cdot g(x))$ 不存在。
④ $\lim\limits_{x\to a}(g(x)+f(x))$ 不存在。
则以上命题中正确的个数是

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.2.1.13-006 880 基础选择 4

【4】设当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 都是无穷大，则当 $x\to+\infty$ 时，下列结论正确的是（　　）

A. $f(x)-g(x)$ 是无穷小

B. $f(x)+g(x)$ 是无穷大

C. $\dfrac{g(x)}{f(x)}\to1$

D. $\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$ 是无穷小

2.2.1.13-007 26 版 660 数三第 620 题

下列命题

① 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$。

② 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$。

③ 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=0$。

④ 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=+\infty$。

正确的个数为

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2.2.1.13-008 26 版 660 数一二三第 148 题

下列极限中，能用洛必达法则计算极限的为

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$

D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$

2.2.1.13-009 26 版 660 数二第 511 题

考察下列运算：

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}\right)}{1}=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}=\dfrac{4}{3}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^5}=\cdots=\infty$。

② $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=\cdots$，

由于分子与分母一直反复，所以该极限不存在。

③ 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\cos x}{x}}=\dfrac{1+0}{1+0}=1$，另一方面，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$ 为"$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型"，由洛必达法则，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}=1$。

其中运算与结论都正确的个数为

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

▶ 2.2.1.14 其他

2.2.1.14-001 1991 数三

(1) 下列各式中正确的是（　）

A. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$

B. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$

D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$

2.2.1.14-002 2000 数三

(1) 设对任意的 x，总有 $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}[g(x)-\varphi(x)]=0$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$（）

A. 存在且等于零

B. 存在但不一定为零

C. 一定不存在

D. 不一定存在

2.2.1.14-003 2006 数三

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$，$x>0$，$y>0$，求

（I）$g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)$；

（II）$\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$。

2.2.1.14-004 2006 数三

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$_____

2.2.1.14-005 880 第一章综合选择 14

【14】下列极限存在的是（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$

B. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{\sin x}{x}\right)^x$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}[n+(-1)^n(n+1)]$

D. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$

2.2.1.14-006 26 版 660 数二第 510 题

以下四个极限中，极限不存在的有多少个

① $\lim\limits_{x\to\infty}(5x^5-3x^3+2)$.

② $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$.

③ 数列极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{a^n}{1+a^n}}$，其中常数 $a>0$.

④ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

A. 1.　　**B.** 2.　　**C.** 3.　　**D.** 4.

2.2.1.14-007 900 数二第一章 A 类 47

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，当 $x\neq1$ 时，$f_n(x)=f\circ f\circ\cdots\circ f(x)$，即 n 个 $f(x)$ 复合所得函数，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_{2n+1}(x)}{f_{2n}(x)}=$_____。

2.2.1.14-008 900 数二第一章 A 类 38

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^3}\mathrm{e}^{-x^2+\frac{x}{2}}=$_____.

2.2.1.14-009 26 版 660 数一二三第 3 题

设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，则 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=$_____。

2.2.1.14-010 25 版 660 数一二三第 16 题

设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续，且 $f(1)=1$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left[2+f\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right]=$_____。

2.2.1.14-011 26 版 660 数一二三第 2 题

设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases} f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0} g[f(x)]=$_____.

2.2.1.14-012 26 版 660 数二第 426 题

设 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x<-1\\ 2-x, & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 2+x, & x>0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0\\ -x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f[g(x)]=$____

2.2.1.14-013 880 第一章综合解答 12

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n+1]{n})}{(\sqrt[n]{\mathrm{e}}-1)\ln n}$.

2.2.1.14-014 880 第二章基础填空 10

设 $f(x)=n^2\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-(1+n)x$ 在 $x=x_n$ 处有水平切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{x_n}=$_____。

2.2.1.14-015 26 版 1000 第五章基础 14

设函数 $f(x)=n^2\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}-(1+n)x$，若 $f(x)$ 在 $x=\xi_n$ 处取得极值，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=$_____。

2.2.1.14-016 880 第二章基础填空 11

【11】设曲线 $y=f(x)=\dfrac{1}{1+x^n}$，在其上点 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线与 x 轴交于点 $(x_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=$_____

2.2.1.14-017 26 版 660 数一二三第 168 题

设 ξ 为函数 $f(x)=\arcsin x$ 在区间 $[0,b]$ 上使用拉格朗日中值定理中的" 中值"，则极限 $\lim\limits_{b\to 0}\dfrac{\xi}{b}=$

（A）$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$.　（B）$\dfrac{1}{2}$.　（C）$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.　（D）$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$　**B.** $\frac{1}{2}$　**C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$　**D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2.1.14-018 26 版 660 数一二三第 169 题

设 $x\geqslant 0$，由中值定理可知，$\exists\xi\in(x,x+1)$，使得 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$。若记 $\theta(x)=\xi-x$，则下列正确的是

A. $\theta(x)$ 单调增，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$　**B.** $\theta(x)$ 单调减，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=0$

C. $\theta(x)$ 单调增，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$　**D.** $\theta(x)$ 单调减，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$

2.2.1.14-019 26 版 660 数一二三第 170 题

设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内二阶可导，$f''(0)eq0$。$\forall x\in(-1,0)\cup(0,1)$，$\exists\theta(x)$ 介于 0，x 之间，且满足 $f(x)-f(0)=$

$xf'(\theta(x)x)$，则 $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=$

A. -1　　**B.** $-\dfrac{1}{2}$　　**C.** $\dfrac{1}{2}$　　**D.** 1

2.2.1.14-020 880 第一章基础选择 11

【11】设正值数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n^n=\mathrm{e}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n(x_n+y_n-2)=(\quad)$。

A. e　　**B.** $2\mathrm{e}$　　**C.** 2　　**D.** 1

2.2.1.14-021 26 版 660 数一二三第 166 题

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f'(x)+f(x)]=1$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 分别为

A. $0,0$　　**B.** $1,1$　　**C.** $0,1$　　**D.** $1,0$

2.2.1.14-022 26 版 1000 第一章强化 19

已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是整数},\\ -1, & x\text{ 不是整数},\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to\infty}\int_0^{\frac{1}{x}}f(x)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=(\quad)$.

A. e^{-1}　　**B.** e　　**C.** 0　　**D.** 1

2.2.1.14-023 26 版 1000 第二章基础 2

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^{100}-(n-1)^{100}}=$_____.

2.2.1.14-024 25 版 660 数一二三第 201 题

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\int_0^{n\pi}|\sin x|\,dx}{(n+1)\pi}=$

A. 0　　**B.** 不存在　　**C.** $\dfrac{2}{\pi}$　　**D.** $\dfrac{1}{\pi}$

2.2.1.14-025 900 数二第一章 B 类 7（选做）

已知数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 满足 $x_1=y_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=1-\cos x_n$，$y_{n+1}=y_n^2$（$n=1,2,\cdots$），则当 $n\to\infty$ 时，（　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-y_n}{y_n}=0$　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+y_n}{y_n}=1$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-y_n}{x_n}=0$　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n+y_n}{x_n}=1$

2.2.2 数列极限

▶ 2.2.2.1 数列以含 n 积分形式给出求极限

▶ 2.2.2.1.1 可积或可化简

2.2.2.1.1-001 2003 数二; 880 综合填空 5

设 $a_n=\dfrac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=$_____

2.2.2.1.1-002 26 版 660 数二第 573 题（重点）

设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{a_n} x^n\,dx=2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$

A. 2　　**B.** 1　　**C.** 0　　**D.** $\dfrac{1}{2}$

2.2.2.1.1-003 26 版 660 数二第 574 题

设 $a_n=3\int_0^{\frac{n+1}{n}} x^{2n-1}\sqrt{1+x^{2n}}\,dx$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=$

A. $(1+e)^{\frac{3}{2}}+1$　　**B.** $(1+e^2)^{\frac{3}{2}}-1$　　**C.** $(1+e^{-1})^{\frac{3}{2}}+1$　　**D.** $(1+e)^{\frac{3}{2}}-1$

2.2.2.1.1-004 900 数二第一章 B 类 29

设 $a_n=\int_{\frac{n}{n+1}}^{\frac{2n}{2n+1}}\dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=$_____。

2.2.2.1.1-005 26 版 1000 第二章强化 11

已知 $a_n=\int_0^1 t^n|\ln t|\,dt, n=1,2,\cdots$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2a_n)^n$。

2.2.2.1.1-006 26 版 1000 第二章强化 9

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx$，$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$，则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{(n+1)a_n}{b_n}\right]^n=(\quad)$.

A. 0　　**B.** e　　**C.** e^{-1}　　**D.** $+\infty$

2.2.2.1.1-007 26 版 1000 第二章强化 12

设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n=\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}$，$n=2,3,\cdots$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\ln(1+\mathrm{e}^{2n})}$。

2.2.2.1.1-008 25 版 0.1w 第九章基础 20

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n-2}}\right)^n=$_____。

2.2.2.1.1-009 900 第三章数二 A 类 48

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{-x}\cos nx\,dx=$_____.

▶ **2.2.2.1.2 不可积**

2.2.2.1.2-001 姜晓千真题同源 150（重点）

例 3.13

(1)（全国大学生 2018 年竞赛题）$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=$_____;

(2)（南京大学 1995）$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\int_x^{x+1}\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\sin t+x}}=$_____。

2.2.2.1.2-002 姜晓千基础

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1}\dfrac{\sin x}{x}\,dx=$_____；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{1+x^2}\,dx=$_____.

2.2.2.1.2-003 880 第三章综合解答 15

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x=0$。

2.2.2.1.2-004 24 版 1000 第九章 C 组 2

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^2(\arctan nx)^3\,\mathrm{d}x=$_____

2.2.2.1.2-005 26 版 660 数二第 464 题

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n\sqrt{x+3}\,\mathrm{d}x=$_____.

2.2.2.1.2-006 26 版 660 数二第 586 题

数列极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^{\sqrt{3}}\dfrac{\sqrt[n]{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x=$

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$　　**B.** $\dfrac{\pi}{12}$　　**C.** $\dfrac{\pi}{3}$　　**D.** $\dfrac{\pi}{2}$

2.2.2.1.2-007 26 版 1000 第二章强化 13

设 $a_n=\int_0^1(1-x^2)^{\frac{n}{2}}\,\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots$.

(1) 证明 $a_{n+1}<a_n<a_{n-1}$;

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n^2$.

2.2.2.1.2-008 880 第一章综合解答 21

【21】设 $a_n=\int_0^1\sin x^n\,\mathrm{d}x$，$b_n=\int_0^1\sin^n x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$，证明：

(I) $0\leqslant b_n\leqslant a_n$；

(II) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

2.2.2.1.2-009 2019 数一三

设 $a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots)$.

(I) 证明数列 $\{a_n\}$ 单调递减，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\cdots)$；

(II) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

2.2.2.1.2-010 880 第三章综合解答 22

【22】设 $a_n=\int_0^{\pi} x\sin^n x\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(I) 证明：$a_n=\dfrac{n-1}{n}a_{n-2}\ (n=3,4,\cdots)$；

(II) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

▶ 2.2.2.2 n 项数列极限计算

▶ 2.2.2.2.1 n 项和

▶ 2.2.2.2.1.1 夹逼定理

2.2.2.2.1.1-001 1995 数二; 26 版 660 数一二三第 132 题; 880 第一章基础解答 6-1

137 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$

A. 3　　**B.** 2　　**C.** $\dfrac{2}{3}$　　**D.** $\dfrac{1}{2}$

2.2.2.2.1.1-002 900 数二第一章 A 类 49

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\cos 0|1^2+|\cos 1|2^2+\cdots+|\cos(n-1)|n^2}=$_____.

2.2.2.2.1.1-003 900 数二第一章 A 类 50

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{3n^2+2\sin^2 1+1}+\dfrac{3}{3n^2+2\sin^2 2+2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{3n^2+2\sin^2 n+n}\right)=$____.

2.2.2.2.1.1-004 900 数二第一章 A 类 51

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n\cdot n!}=$_____。

2.2.2.2.1.1-005 26 版 1000 第二章基础 3

设 $\{a_n\}$ 非负有界，$b_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{a_n+n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=$_____.

▶ 2.2.2.2.1.2 定积分定义求 n 项和极限

▶ 2.2.2.2.1.2.1 0 到 1，n 等分，取端点

2.2.2.2.1.2.1-001 2002 数二

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right)=$_____

2.2.2.2.1.2.1-002 同济大学 2011; 2012 数二

$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$_____

2.2.2.2.1.2.1-003 2016 数二三

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$_____

2.2.2.2.1.2.1-004 2017 数一二三

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$.

2.2.2.2.1.2.1-005 900 第三章数二 A 类 87

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\arctan\sqrt{\dfrac{k}{n}}$。

2.2.2.2.1.2.1-006 26 版 660 数一二三第 180 题

数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1^2}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)=$

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　**B.** $\dfrac{\pi}{4}$　　**C.** $\dfrac{\pi}{3}$　　**D.** $\dfrac{\pi}{6}$

2.2.2.2.1.2.1-007 姜晓千基础例题

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$_____.

2.2.2.2.1.2.1-008 25 版 660 数一二三第 60 题

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}}=$_____.

2.2.2.2.1.2.1-009 900 第三章数二 A 类 41

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n}}=$_____.

2.2.2.2.1.2.1-010 26 版 1000 第八章基础 2

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[\ln(3n-2i)-\ln(n+2i)]=$_____.

2.2.2.2.1.2.1-011 880 第三章基础填空 20

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{n+2k}{3n-2k}=$_____

2.2.2.2.1.2.1-012 900 第三章数二 A 类 37

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\arcsin\dfrac{1}{n}+2\arcsin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\arcsin\dfrac{n}{n}\right)=$_____。

2.2.2.2.1.2.1-013 24 版 1000 第八章 B 组 8

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)(n+2)}=$_____

2.2.2.2.1.2.1-014 24 版 1000 第八章 A 组 14

已知 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\neq 0,\\ \lim\limits_{n\to\infty}2\left[\dfrac{n}{(n+1)^2}+\dfrac{n}{(n+2)^2}+\cdots+\dfrac{n}{(n+n)^2}\right], & x=0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

2.2.2.2.1.2.1-015 900 第三章数二 B 类 41（重点）

(I) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2}+\cdots+\sqrt[4]{n}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{1}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$;

(II) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^4+1}+\dfrac{2}{n^4+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^4+n}\right)\left(\sqrt[4]{1}+\sqrt[4]{2}+\cdots+\sqrt[4]{n}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{1}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$.

2.2.2.2.1.2.1-016 26 版 1000 第八章强化 1

极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{i-\frac{1}{2}}{n^4}\sqrt{n^4-\left(i-\dfrac{1}{2}\right)^4}=$_____.

2.2.2.2.1.2.1-017 26 版 1000 第八章基础 16

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right]=$_____.

2.2.2.2.1.2.1-018 26 版 1000 第八章基础 17

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+9i^2}=$_____.

▶ 2.2.2.2.1.2.2 0 到 1，非 n 等分，取端点

2.2.2.2.1.2.2-001 2025 数二

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln\dfrac{1}{n}+2\ln\dfrac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\dfrac{n-1}{n}\right]=$_____.

2.2.2.2.1.2.2-002 浙江省 2009 年竞赛题（重点）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=n}^{2n}\dfrac{n}{i(n+i)}$;

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=n+1}^{3n}\dfrac{n}{i(n+i)}$。

2.2.2.2.1.2.2-003 姜晓千真题同源 150（重点）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+3}+\cdots+\dfrac{1}{n+2n+1}\right)$;

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+3n)}$;

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\sqrt[n]{(n^2+1)(n^2+2^2)\cdots[n^2+(2n)^2]}$。

2.2.2.2.1.2.2-004 900 第三章数二 A 类 39

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\frac{2n\pi}{n}}\right)=_____。$$

2.2.2.2.1.2.2-005 24 版 1000 第八章 B 组 7

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}+\cdots+\frac{3n}{4n}\right)=_____$$

▶ **2.2.2.2.1.2.3 0 到 1，非 n 等分，任意取点**

2.2.2.2.1.2.3-001 2021 数一二

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\,dx=$（　　）.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{2n}$　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}$　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\frac{2}{n}$

2.2.2.2.1.2.3-002 26 版 1000 第八章基础 1

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，则 $\int_0^1 f(x)\,dx=$（　）。

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k-1}{3n}\right)\frac{1}{3n}$　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{3k-1}{3n}\right)\frac{1}{n}$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}f\left(\frac{k-1}{3n}\right)\frac{1}{n}$　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{3n}f\left(\frac{k}{3n}\right)\frac{3}{n}$

2.2.2.2.1.2.3-003 900 第三章数二 A 类 3

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$ $(a>0)$ 上连续，则 $\int_0^a f(x)\,dx=$（　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{2n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{2ka-a}{2n}\right)$　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{ka-a}{2n}\right)$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{4n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{4ka-a}{4n}\right)$　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\frac{4ka-3a}{4n}\right)$

▶ **2.2.2.2.1.2.4 0 到 1，n 等分，任意取点**

2.2.2.2.1.2.4-001 姜晓千真题同源 150（重点）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\frac{(2i-1)\pi}{4n}\cdot\frac{1}{n}$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\frac{(3i-1)\pi}{6n}\cdot\frac{1}{n}$.

2.2.2.2.1.2.4-002 姜晓千真题同源 150（重点）

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\cos\frac{(2i-1)\pi}{3n}\cdot\frac{1}{n}$。

2.2.2.2.1.2.4-003 浙江省 2013 年竞赛题（重点）

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i-\sin^2 i}{n^2}\left[\ln(n+i-\sin^2 i)-\ln n\right]$$

2.2.2.2.1.2.4-004 25 版 660 数一二三第 113（重点）

计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{2}-1}{\sqrt[n]{2n+1}}\left(\int_1^{\frac{1}{2n}}e^{-y^2}\,dy+\int_1^{\frac{3}{2n}}e^{-y^2}\,dy+\cdots+\int_1^{\frac{2n-1}{2n}}e^{-y^2}\,dy\right)=$_____。

▶2.2.2.2.1.2.5 0 到 x，n 等分，取端点（变限积分）

2.2.2.2.1.2.5-001 江苏省 1996 年竞赛题（重点）

【例 2.4】（江苏省 1996 年竞赛题）设

$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2}{n}x+\cdots+\cos\dfrac{n-1}{n}x\right), & x>0\\ \lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{n!}\left(\int_0^1\sqrt{1+x^3+x^5}\,dx\right)^n\right], & x=0\\ f(-x), & x<0\end{cases}$$

(I) 讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可导性；
(II) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值。

2.2.2.2.1.2.5-002 24 版 1000 第九章 B 组 12

设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(1+\cos\dfrac{x}{n}+\cos\dfrac{2x}{n}+\cdots+\cos\dfrac{n-1}{n}x\right), & x>0,\\ 1, & x=0,\\ f(-x), & x<0.\end{cases}$

（1）求 $f'(0)$；
（2）求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的最大值。

2.2.2.2.1.2.5-003 26 版 1000 第八章强化 18

【18】设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{n}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{n^2}}+\mathrm{e}^{-\frac{4x^2}{n^2}}+\cdots+\mathrm{e}^{-x^2}\right)$，求：
（1）$f(x)$ 的表达式；
（2）曲线 $y=\mathrm{e}^{x^2}f(x)$ 的拐点。

▶2.2.2.2.1.3 定积分定义 + 夹逼

2.2.2.2.1.3-001 莫斯科 1976 年竞赛题; 880 第三章综合解答 16（重点）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right);$$

2.2.2.2.1.3-002 24 版 1000 第八章 B 组 9

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{3^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{3^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)=$$_____

2.2.2.2.1.3-003 1998 数一

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

2.2.2.2.1.3-004 姜晓千真题同源 150（重点）

求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n^2}\right);$$

2.2.2.2.1.3-005 姜晓千真题同源 150（重点）

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}+\frac{\sqrt{2n-1}}{2n}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2-1}}{n^2}\right);$$

2.2.2.2.1.3-006 全国大学生 2020 年竞赛题（重点）

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n+\sqrt{i}}\right)$.

2.2.2.2.1.3-007 26 版 660 数一二三第 59 题

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2+1}=_____.$$

2.2.2.2.1.3-008 900 第三章数二 B 类 26

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i\sqrt{n^2-i^2}}{\left(n+\frac{1}{i}\right)^3}=_____.$$

2.2.2.2.1.3-009 900 第三章数二 B 类 25

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-\sin^2 n}=_____.$$

2.2.2.2.1.3-010 900 第三章数二 B 类 42

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2}{n^3+1}+\dfrac{2n^2}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n\cdot n^2}{n^3+n}\right)\left(\dfrac{1}{4n^2-1^2}+\dfrac{1}{4n^2-2^2}+\cdots+\dfrac{1}{4n^2-n^2}\right)$.

2.2.2.2.1.3-011 24 版 1000 第八章 C 组 4

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{n}}+\frac{1}{n+\frac{1+1}{n}}+\frac{1}{n+\frac{4+1}{n}}+\cdots+\frac{1}{n+\frac{(n-1)^2+1}{n}}\right]=_____$$

2.2.2.2.1.3-012 880 第三章综合解答 18

【18】设 $f(x)=x^2$，$f[g(x)]=-x^2+2x+3$，且 $g(x)\geqslant 0$。

(I) 求 $g(x)$ 的定义域与值域；

(II) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\dfrac{1}{n+g(x)}$。

2.2.2.2.1.3-013 26 版 1000 第八章强化 19

【19】设 $f(x)=x^2$，$f[\varphi(x)]=-x^2+2x+3$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(n-i)\cdot\dfrac{1}{n+\varphi(x)}=(\quad)$。

A. $\dfrac{1}{12}$　　**B.** $\dfrac{1}{6}$　　**C.** $\dfrac{1}{3}$　　**D.** $\dfrac{2}{3}$

▶ 2.2.2.2.1.4 二重积分定义求 n 项和极限

2.2.2.2.1.4-001 2010 数一

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$（　）

A. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$　　**B.** $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

C. $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$　　**D.** $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

2.2.2.2.1.4-002 清华大学

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{ij}{n^4}=$_____.

2.2.2.2.1.4-003 25 版 0.1w 强化 1

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{(n+i)\sqrt{n^2+j^2}}=$_____

2.2.2.2.1.4-004 880 第五章综合选择 2

【2】$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{i}{n}\right)(n^2+j^2)}=$（　）.

A. $\dfrac{\pi}{4}\ln 2$　　**B.** $\dfrac{\pi}{8}\ln 2$　　**C.** $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$　　**D.** $\pi\ln 2$

2.2.2.2.1.4-005 900 第五章数二 C 类 1（重点）

记 $I_1=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n-i}\left(\sin\dfrac{i}{n}-\sin\dfrac{j}{n}\right)$，　$I_2=-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=-n}^{-1}\sum\limits_{j=1}^{n+i}\left(\sin\dfrac{i}{n}+\sin\dfrac{j}{n}\right)$，

$I_3=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=-n}^{-1}\sum\limits_{j=-n-i}^{-1}\left(\sin\dfrac{i}{n}+\sin\dfrac{j}{n}\right)$，　$I_4=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=i-n}^{-1}\left(\sin\dfrac{i}{n}-\sin\dfrac{j}{n}\right)$，

则 I_1,I_2,I_3,I_4 中，（　　）

A. I_1 最小，I_2 最大　　**B.** I_1 最小，I_4 最大

C. I_3 最小，I_2 最大　　**D.** I_3 最小，I_4 最大

▶ 2.2.2.2.1.5 极坐标

2.2.2.2.1.5-001 880 第三章综合选择 12（选做）

【12】设螺线 $r=\theta(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$ 与极轴所围区域的面积为 A，则 $A=$（　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{4\pi^3 i^2}{n^3}$　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{4\pi^3 i^2}{n^2}$　　**C.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{8\pi^3 i^2}{n^3}$　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2\pi^3 i^2}{n^2}$

▶ 2.2.2.2.1.6 差分法

2.2.2.2.1.6-001 900 数二第一章 B 类 28（选做）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\arctan\dfrac{2}{1+0+0^2}+\arctan\dfrac{2}{1+2+1^2}+\cdots+\arctan\dfrac{2}{1+2n+n^2}\right)=$_____.

▶ 2.2.2.2.1.7 等比数列求和

2.2.2.2.1.7-001 880 第一章综合解答 2

设 $a_k=2^{\frac{1}{2^k}}$，$u_n=a_1a_2\cdots a_n\ (n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$。

▶ 2.2.2.2.1.8 裂项相消

2.2.2.2.1.8-001 880 第一章基础解答 6-3

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{4k^2-1}$;

▶ **2.2.2.2.2 n 项积**

2.2.2.2.2-001 2004 数二

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$ 等于 (　).

A. $\int_1^2\ln^2 x\,dx$　　**B.** $2\int_1^2\ln x\,dx$

C. $2\int_1^2\ln(1+x)\,dx$　　**D.** $\int_1^2\ln^2(1+x)\,dx$

2.2.2.2.2-002 900 第三章数二 A 类 40

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[2n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=$_____.

2.2.2.2.2-003 24 版 1000 第八章 A 组 12

$\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}=$____

2.2.2.2.2-004 24 版 1000 第八章 B 组 6

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}=$_____

2.2.2.2.2-005 880 第三章综合解答 17

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$.

2.2.2.2.2-006 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.23】(I) 证明：当 $x>0$ 时，$x-\dfrac{1}{2}x^2<\ln(1+x)<x$；

(II) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

2.2.2.2.2-007 880 第一章拓展 4

【4】(I) 证明：$\dfrac{1}{n}-\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{2n^2}$（$n$ 为正整数）；

(II) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

2.2.2.2.2-008 姜晓千真题同源 150

【补例】（I）证明：当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$x-\dfrac{1}{6}x^3<\sin x<x$；

（II）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1+\dfrac{i}{n}\right)\sin\dfrac{i}{n^2}$。

2.2.2.2.2-009 26 版 660 数一二三第 17 题

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}=_____.$$

2.2.2.2.2-010 880 第一章综合解答 17

【17】求下列极限：

（I）当 $|x|<1$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$；

（II）当 $|x|\neq 0$ 时，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$；

（III）$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sqrt{\sin x})(1-\sqrt[3]{\sin x})\cdots(1-\sqrt[n]{\sin x})}{(1-\sin x)^{n-1}}$。

2.2.2.2.2-011 24 版 1000 第八章 A 组 13

已知 $f(x)=a^{x^3}$，$a>0$ 且 $a\neq 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^4}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$_____

▶ 2.2.2.2.3 n 次根号下 n 次方的和

2.2.2.2.3-001 880 第一章综合解答 4; 26 版 660 数二第 438 题

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_k^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}(a_i>0,i=1,2,\cdots,k)$。

2.2.2.2.3-002 姜晓千基础例题

设 $a>b>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-n}+b^{-n}}=$_____。

2.2.2.2.3-003 880 第一章综合填空 7

设 $0<a_1<a_2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_1^{-n}+a_2^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=$_____

2.2.2.2.3-004 姜晓千基础例题; 26 版 1000 第二章基础 6

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=$_____.

2.2.2.2.3-005 70 年代苏联竞赛题; 26 版 660 数二第 433 题

设 $x\geq 0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}=$_____。

2.2.2.2.3-006 26 版 1000 第二章基础 5

当 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x+\cos^n x}=$_____.

▶ 2.2.2.2.4 n 次根号下 n 项和

2.2.2.2.4-001 姜晓千真题同源 150（重点）

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+1)^n+\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^{2n}+\cdots+\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)+(n^2+1)^{\frac{1}{2}}+\cdots+(n^n+1)^{\frac{1}{n}}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}$.

2.2.2.2.4-002 880 基础解答 6-4

求极限：

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

▶ 2.2.2.3 递推数列

▶ 2.2.2.3.1 一阶递推数列求极限（单调有界证明）

2.2.2.3.1-001 1996 数一

设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

2.2.2.3.1-002 2002 数二

设 $0<x_1<3$, $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 并求此极限.

2.2.2.3.1-003 2006 数一二; 880 第一章综合解答 14

【14】设 $0<x_1<\pi$，$x_{n+1}=\sin x_n$。

(I) 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求值；

(II) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

2.2.2.3.1-004 880 第一章综合解答 22

【22】设 $x_1\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n+1}+\tan x_n)(n=1,2,\cdots)$。

(I) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值；

(II) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$。

2.2.2.3.1-005 26 版 1000 第二章强化 7

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos x_{n+1}-x_{n+1}=\cos x_n$，$n=1,2,\cdots$。

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值；

(2) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n^2}$。

2.2.2.3.1-006 26 版 1000 第二章强化 8

已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\dfrac{\pi}{4}$，$x_{n+1}+\tan x_n=2x_n$，$n=1,2,\cdots$。

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值；

(2) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n^2}-\dfrac{1}{x_nx_{n+1}}\right)$。

2.2.2.3.1-007 2012 数二

(I) 证明方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$ (n 为大于 1 的整数) 在区间 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 内有且仅有一个实根；

(II) 记 (I) 中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限。

2.2.2.3.1-008 2013 数二

设函数 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

（I）求 $f(x)$ 的最小值；

（II）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限。

2.2.2.3.1-009 2018 数一二三

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$ $(n=1,2,\cdots)$。证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

2.2.2.3.1-010 880 第一章基础解答 10

设 $x_1=\sqrt{a}(a>0)$，$x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值。

2.2.2.3.1-011 880 第一章综合解答 16

设 $x_1>0$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=\ln\left(e^{x_n}-1\right)-\ln x_n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求值。

2.2.2.3.1-012 26 版 660 数一二三第 18 题

设 $x_0=0$，$x_n=\dfrac{1+2x_{n-1}}{1+x_{n-1}}(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=$_____。

2.2.2.3.1-013 880 综合解答 20

设 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=x_n^2+x_n$ $(n=1,2,\cdots)$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n+1}\right)$。

2.2.2.3.1-014 26 版 1000 第二章基础 4

设 $x_0>0$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ $(n=0,1,2,\cdots)$，且 $a>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求此极限。

2.2.2.3.1-015 26 版 1000 第二章强化 5

设 $0\leqslant x_1\leqslant\sqrt{c}$，$x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}$，$n\in\mathbf{Z}^+$，$c>1$。证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其值。

2.2.2.3.1-016 26 版 1000 第二章强化 10

设 $x_1<0$，$x_{n+1}=\mathrm{e}^{x_n}-1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$。

2.2.2.3.1-017 26 版 1000 第二章强化 14

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$a_0=\dfrac{1}{2},a_{n+1}=a_n^2,n=0,1,2,\cdots;b_n=\tan b_{n+1},0<-b_n<\dfrac{\pi}{4},n=0,1,2,\cdots$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$.

2.2.2.3.1-018 25 版 660 数一二三第 123 题

设 $1<a\leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，$x_1=a$，$x_2=a^{x_1}$，$\cdots$，$x_n=a^{x_{n-1}}$，$\cdots$，则

A. 数列 $\{x_n\}$ 单调增，但是没有极限。　**B.** 数列 $\{x_n\}$ 单调增，且有极限。

C. 数列 $\{x_n\}$ 单调减，但是没有极限。　**D.** 数列 $\{x_n\}$ 单调减，且有极限。

2.2.2.3.1-019 26 版 660 数二第 444 题

设 $a_0>0$，$a_n=a_{n-1}(a_{n-1}+1)\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$_____。

2.2.2.3.1-020 880 第一章拓展 5（选做）

【5】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，$f(0)=0$。取 $x_1\in(0,1)$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $(x_{n+1}-x_n)f'(x_n)+f(x_n)=0\ (n=1,2,\cdots)$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求其值。

▶ 2.2.2.3.2 二阶递推数列求极限

2.2.2.3.2-001 900 数二第一章 B 类 26（选做）

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_2=2$, 且 $a_n=\dfrac{1}{3}a_{n-1}+\dfrac{2}{3}a_{n-2}\ (n=3,4,5,\cdots)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$_____。

2.2.2.3.2-002 880 综合解答 5（选做）

【5】(I) 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(3x_{n+1}-x_n)(n=1,2,\cdots)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

(II) 设 $x_1=1,x_2=2,x_{n+2}=\dfrac{1}{2}(x_n+x_{n+1})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

▶ 2.2.2.4 其他

2.2.2.4-001 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.24】(I) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(II) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\ln n}[e^x]\,dx$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数。

2.2.2.4-002 25 版 660 数一二三第 128 题

设 $u_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$，则下列命题正确的是

A. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=A>0$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ 不存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq+\infty$

2.2.2.4-003 880 第一章综合解答 23

【23】(I) 证明：方程 $\sin x=(\ln x)^{\frac{1}{n}}\ (n=1,2,\cdots)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{2},\mathrm{e}\right)$ 内有唯一实根 x_n；

(II) 在第 (I) 小题的基础上，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\pi\sin x_n}{2x_n}\right)^{\frac{1}{x_n-\frac{\pi}{2}}}$。

2.2.2.4-004 900 数二第一章 A 类 62

62 (I) 证明方程 $\mathrm{e}^{-nx}+\mathrm{e}^{-(n-1)x}+\cdots+\mathrm{e}^{-x}=1$ $(n\geqslant 2)$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根.
(II) 记 (I) 中的实根为 x_n，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

2.2.2.4-005 880 第一章拓展 2

【2】(I) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数. 证明:

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,dx\leqslant f(k)\quad(k=1,2,\cdots);$$

(II) 证明: $\ln(1+n)\leqslant 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\leqslant 1+\ln n$, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

2.2.2.4-006 880 第一章拓展 3

【3】设 $f_n(x)=x^n-\cos x(n=1,2,\cdots)$.
(I) 证明方程 $f_n(x)=0$ 在 $x\in(0,1)$ 内有唯一实根 x_n;
(II) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n)^{\frac{1}{n}\ln\cos x_n}$.

2.2.2.4-007 880 第一章拓展 1

【1】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $|f'(x)|<1$，当 $x\in[a,b]$ 时，有 $a<f(x)<b$，$F(x)=\dfrac{1}{2}[x+f(x)]$，证明：
(I) 存在 $x^*\in(a,b)$，使得 $F(x^*)=x^*$;
(II) 对 $x_0\in[a,b]$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=F(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$。

2.2.2.4-008 880 第一章综合解答 6

【6】设 $f_n(x)=1-(1-\cos x)^n$ $(n=1,2,\cdots)$.
(I) 证明：方程 $f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内有且仅有一个实根 x_n;
(II) 设 $x_n\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，满足 $f_n(x_n)=\dfrac{1}{2}$，证明：$\arccos\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

2.2.2.4-009 880 第一章综合解答 1

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q$，且 $|q|<1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

2.2.2.4-010 880 第一章综合解答 7

【7】(I) 证明：方程 $x=1+2\ln x$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内有唯一实根 ξ;
(II) 取 $x_0\in(\mathrm{e},\xi)$，令 $x_n=1+2\ln x_{n-1}$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

2.2.2.4-011 880 第一章综合解答 3

设数列 $x_n=(1+a)^n+(1-a)^n$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}1+|a|, & a\neq 0,\\ 1, & a=0.\end{cases}$

2.3 数列极限

2.3.1 概念题

2.3.1-001 1998 数二

(1) 设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是（　　）

A. 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必发散　　**B.** 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必有界

C. 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小　　**D.** 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

2.3.1-002 1999 数二

(4) “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$，总存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，恒有 $|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的（　　）

A. 充分条件但非必要条件.　　**B.** 必要条件但非充分条件.

C. 充分必要条件.　　**D.** 既非充分条件又非必要条件.

2.3.1-003 2003 数一二

（1）设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$，则必有（　　）

A. $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　**B.** $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

C. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　**D.** 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

2.3.1-004 2012 数二

(3) 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ()

A. 充分必要条件.　　**B.** 充分非必要条件.

C. 必要非充分条件.　　**D.** 既非充分也非必要条件.

2.3.1-005 2014 数三

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有 ()

A. $|a_n|>\dfrac{|a|}{2}$　　**B.** $|a_n|<\dfrac{|a|}{2}$　　**C.** $a_n>a-\dfrac{1}{n}$　　**D.** $a_n<a+\dfrac{1}{n}$

2.3.1-006 2015 数三; 880 基础解答 4

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列. 下列命题中不正确的是 (　)

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$　　**B.** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$　　**D.** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$

2.3.1-007 26 版 660 数一二三第 134 题

设有下列命题

① 数列 $\{x_n\}$ 收敛（即存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$），则 $\{x_n\}$ 有界。

② 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+l} = a$。其中 l 为某个确定的正整数。

③ 数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$。

④ 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1$。

则以上命题中正确的个数是

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2.3.1-008 880 第一章基础选择 10

【10】设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 均不存在，则下列选项正确的是（　　）.

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必存在

C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必不存在

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 必存在

2.3.1-009 880 第一章综合选择 8

【8】下列结论中错误的是（　　）.

A. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 1$，则存在 $M > 1$，当 n 充分大时，有 $a_n > M$

B. 设 $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n < \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则当 n 充分大时，有 $a_n < b_n$

C. 设 $M \leqslant a_n \leqslant N\ (n = 1, 2, \cdots)$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则 $M \leqslant a \leqslant N$

D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \neq 0$，则当 n 充分大时，$a_n > a - \dfrac{1}{n}$

2.3.1-010 900 数二第一章 A 类 10

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，则下列关于数列 $\{a_n\}$ 的说法中，正确的是（　　）

A. 若 $a > 0$，则当 n 充分大时，$a_n > 0$。

B. 若 $a \geqslant 0$，则 $\{a_n\}$ 中只存在有限个负项。

C. 若 $a = 0$，则当 n 充分大时，$a_n \geqslant -\dfrac{1}{n}$。

D. 若 $a = 0$，则当 n 充分大时，$a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$。

2.3.1-011 900 数二第一章 A 类 8

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1} - a_n - 1) = 0$，则（　　）

A. $\{a_n\}$ 有界.

B. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

C. $\{a_n\}$ 自某项起单调减少.

D. $\{a_n\}$ 自某项起单调增加.

2.3.2 数列收敛发散问题

2.3.2-001 2007 数一二

(5) 设函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内具有二阶导数，且 $f''(x) > 0$，令 $u_n = f(n)(n = 1, 2, \cdots)$，则下列结论正确的是（　　）

A. 若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛

B. 若 $u_1 > u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

C. 若 $u_1 < u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛

D. 若 $u_1 < u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散

2.3.2-002 2008 数一二

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是（　　）

A. 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛。
B. 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛。
C. 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛。
D. 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛。

2.3.2-003 2017 数二

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则（　）

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.
B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.
C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.
D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

2.3.2-004 900 数二第一章 A 类 7

设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 ()

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。
B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^3+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。
C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^2+x_n^3)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。
D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n+\ln(x_n+1)]=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$。

2.3.2-005 2022 数一二

(6) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x_n\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，则（　　）

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。
B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在。
C. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(\sin x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在。
D. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\cos x_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在。

2.3.2-006 900 数二第一章 B 类 8

已知数列 $\{x_n\}$，其中 $-\infty<x_n<+\infty$，函数 $f(x)=e^{-|x|}$，则（　　）

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan f(x_n)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在
B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\arctan x_n)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在
C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan f(x_n)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在
D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\arctan x_n)$ 存在时，$\lim\limits_{n\to\infty}\arctan x_n$ 存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 不一定存在

2.3.2-007 2024 数二

已知数列 $\{a_n\}(a_n\neq0)$，若 $\{a_n\}$ 发散，则（　　）.

A. $\left\{a_n+\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散
B. $\left\{a_n-\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散
C. $\left\{e^{a_n}+\dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散
D. $\left\{e^{a_n}-\dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散

2.3.2-008 880 第一章综合选择 12

【12】设 $f(n)$ 表示方程 $x(1+\ln x)=n$ 的正实根，其中 $x\geqslant 1$，n 为正整数，则下列选项正确的是（）.

A. $\{f(n)\}$ 收敛　　**B.** $\left\{\dfrac{f(n)}{n}\right\}$ 发散

C. $\left\{\dfrac{f(n)\ln n}{n}\right\}$ 收敛　　**D.** $\left\{\dfrac{f(n)\ln n}{n}\right\}$ 发散

2.3.2-009 26 版 1000 第二章强化 2

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调增加，则以下选项中使得 $\{a_n\}$ 收敛的是（）.

A. $\left\{(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}}\right\}$ 收敛于 1　　**B.** $\left\{\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right\}$ 收敛于 e

C. $\{a_n\ln a_n\}$ 收敛于 0　　**D.** $\left\{\frac{\ln a_n}{a_n}\right\}$ 收敛于 0

2.3.2-010 880 第一章综合选择 13

【13】设 $\{x_n\}$ 为数列，则下列结论正确的是（　　）

① 若 $\{\arctan x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛；

② 若 $\{\arctan x_n\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛；

③ 若 $x_n\in[-1,1]$，且 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{\arcsin x_n\}$ 收敛；

④ 若 $x_n\in[-1,1]$，且 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{\arcsin x_n\}$ 收敛。

A. ①②　　**B.** ③④　　**C.** ①③　　**D.** ②④

2.3.2-011 880 第一章综合选择 10

【10】设数列 $\{x_n\}$ 单调减少，$\{y_n\}$ 单调增加，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，则下列选项正确的是（　　）.

A. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 不存在　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ 均不存在

2.3.2-012 900 数二第一章 B 类 10

已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，满足 $0<a_n<b_n<2a_n$，则下列命题中，正确的是（）

① 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$。

② 若 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在。

④ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}b_n$。

A. ①②。　　**B.** ②③。　　**C.** ①②③。　　**D.** ①③④。

2.3.2-013 900 数二第一章 B 类 13

已知 $a_n=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1-x)(1-\sqrt{2x-1})\cdots[1-\sqrt[n]{nx-(n-1)}]}{n(x-1)^n}$，则（）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 均存在。　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 不存在。

C. $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}|na_n|$ 均存在。　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$ 存在，$\lim\limits_{n\to\infty}|na_n|$ 不存在。

2.3.2-014 900 数二第一章 A 类 9

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$，则下列结论中，正确的是（　　）

A. $\lim\limits_{n\to\infty}e^{a_n}=\infty$　　**B.** $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$　　**C.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=1$　　**D.** $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\infty$

2.3.2-015 900 数二第一章 B 类 2

已知数列 $\{a_n\}$ 和连续函数 $f(x)$. 若 $b_n=f(a_n)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，则下列条件中，可以推出" 数列 $\{a_n\}$ 收敛" 的条件个数是 ()

① $f(x)$ 是单调函数.

② $f(x)$ 是偶函数.

③ $f(x)$ 是有界函数.

④ $f(x)$ 是周期函数.

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.3.2-016 900 数二第一章 A 类 6

设 $a_n=\left(1+\sin\dfrac{1}{n}\right)^n$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题中，正确的是（　　）

A. 数列 $\{a_n\}$ 单调增加且收敛于 e　　**B.** 数列 $\{a_n\}$ 单调减少且收敛于 e

C. 数列 $\{a_n\}$ 单调增加且收敛于 $\mathrm{e}^{\sin 1}$　　**D.** 数列 $\{a_n\}$ 单调减少且收敛于 $\mathrm{e}^{\sin 1}$

2.3.2-017 900 数二第一章 B 类 14

已知函数：①$f(x)=2x$；②$f(x)=x^2$；③$f(x)=\sqrt{|x|}$；④$f(x)=\arctan x$，则满足对于任意的首项 a_1，数列 $a_n=f(a_{n-1})(n=2,3,\cdots)$ 均收敛的函数个数为 ()

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2.3.3 数列有界

2.3.3-001 900 数二第一章 A 类 4

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为正项数列，其中 $\{a_n\}$ 无界，$\{b_n\}$ 有界，则下列数列中，一定有界的是（　　）

A. $\left\{\dfrac{b_n}{a_n}\right\}$　　**B.** $\left\{\dfrac{b_n}{1+a_nb_n}\right\}$

C. $\{\sqrt[n]{a_nb_n}\}$　　**D.** $\{a_nb_n-a_{n-1}b_{n-1}\}$

2.3.3-002 26 版 660 数一二三第 136 题

设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均无界，$\{z_n\}$ 有界，则以下命题正确的是

A. $\{x_n+y_n\}$ 无界　　**B.** $\{x_ny_n\}$ 无界　　**C.** $\{x_n+z_n\}$ 无界　　**D.** $\{x_nz_n\}$ 无界

2.3.3-003 880 第一章综合选择 9

【9】设 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 为两个数列，则下列说法正确的是（　　）.

A. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 无界，则 $\{x_n+y_n\}$ 无界　　**B.** 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 无界，则 $\{x_ny_n\}$ 无界

C. 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 中，一个有界，一个无界，则 $\{x_ny_n\}$ 无界　　**D.** 若 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 均为无穷大，则 $\{x_ny_n\}$ 一定为无穷大

2.3.3-004 900 数二第一章 B 类 9

设数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$，则下列结论中，正确的是（　　）

A. 若 $\{x_n\}$ 发散，则 $\{y_n\}$ 必收敛

B. 若 $\{x_n\}$ 无界，则 $\{y_n\}$ 必有界

C. 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必收敛

D. 若 $\left\{\dfrac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

2.3.3-005 900 数二第一章 B 类 6

设函数 $f(x) = \dfrac{(x-1)\sin x}{x+1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$，则下列关于数列 $\{f(n)\}, \left\{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\} (n = 1, 2, 3, \cdots)$ 的说法中，正确的是（　　）

A. $\{f(n)\}, \left\{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 均有界

B. $\{f(n)\}$ 有界，$\left\{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 无界

C. $\{f(n)\}$ 无界，$\left\{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 有界

D. $\{f(n)\}, \left\{f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ 均无界

2.3.3-006 900 数二第一章 B 类 5

下列数列中，无界的是（　　）

A. x_1 为任意实数，$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1+x_n^2}$

B. x_1 为任意实数，$x_{n+1} = (3x_n^2 - 2x_n + 1)\mathrm{e}^{-x_n^2}$

C. x_1 为任意大于 2 的实数，$x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n + 1$

D. x_1 为任意正实数，$x_{n+1} = x_n(x_n + 1)$

2.3.3-007 26 版 660 数三第 621 题

设 $u_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ 并设数列 $\{u_n\}$ 无上界，则

A. 数列 $\left\{\dfrac{1}{u_n}\right\}$ 必有上界。

B. 必有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$。

C. 对于任意给定的 $M > 0$，满足 $u_n < M$ 的 n 只有有限个。

D. 对于任意给定的 $M > 0$，满足 $u_n > M$ 的 n 总有无限个。

2.3.4 数列极限最值

2.3.4-001 2022 数三

(2) 已知 $a_n = \sqrt[n]{n} - \dfrac{(-1)^n}{n}\ (n = 1, 2, \cdots)$，则 $\{a_n\}$（　　）

A. 有最大值，有最小值

B. 有最大值，没有最小值

C. 没有最大值，有最小值

D. 没有最大值，没有最小值

2.3.4-002 900 数二第一章 A 类 5

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \sqrt[n]{n}, n = 1, 2, \cdots$，则下列命题中，正确的是 ()

A. 数列 $\{a_n\}$ 能取到最小值，但取不到最大值

B. 数列 $\{a_n\}$ 能取到最大值，但取不到最小值

C. 数列 $\{a_n\}$ 既能取到最大值，又能取到最小值

D. 数列 $\{a_n\}$ 既不能取到最大值，又不能取到最小值

2.3.4-003 900 数二第一章 B 类 11

已知 $a_n = \dfrac{\sin n}{n} (n = 1, 2, \cdots)$，则数列 $\{a_n\}$（　　）

A. 有最大值，有最小值.
B. 有最大值，没有最小值.
C. 没有最大值，有最小值.
D. 没有最大值，没有最小值.

2.3.5 数列无穷小比阶

2.3.5-001 2023 数二; 26 版 1000 第二章强化 6

已知 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足：$x_1=y_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$y_{n+1}=y_n^2$ $(n=1,2,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，（　　）

A. x_n 是 y_n 的高阶无穷小
B. y_n 是 x_n 的高阶无穷小
C. x_n 与 y_n 是等价无穷小
D. x_n 与 y_n 是同阶但不等价的无穷小

2.3.5-002 880 第一章综合选择 11

【11】设正项数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $\mathrm{e}^{x_n}=x_n+\mathrm{e}^{y_n}(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，则当 $n\to\infty$ 时，正确的是（　　）

A. y_n 是比 x_n 高阶的无穷小
B. x_n 是比 y_n 高阶的无穷小
C. y_n 与 x_n 是等价无穷小
D. x_n 与 y_n 是同阶但不等阶无穷小

2.3.6 证明题

2.3.6-001 1999 数二; 880 第三章综合解答 54

设 $f(x)$ 是区间 $[0,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,dx$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。

2.3.6-002 2011 数一二; 880 综合解答 15

(I) 证明对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立；

(II) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ $(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛。

2.3.6-003 880 第一章基础解答 11

设 $x_1=a\geqslant 0$, $y_1=b\geqslant 0$, $a\leqslant b$, $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}$, $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

2.4 已知极限相关

2.4.1 已知极限（存在）确定参数

2.4.1-001 1987 数一

求正的常数 a 与 b，使等式 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\,\mathrm{d}t=1$ 成立。

2.4.1-002 880 第三章基础选择 10

(6) 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x-ax}\int_b^x\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t=c$，且 $c\neq0$，则（　　）。

A. $a=1,b=0,c=-2$
B. $a=1,b=-2,c=-2$
C. $a=0,b=1,c=-2$
D. $a=1,b=1,c=1$

2.4.1-003 1998 数二

确定常数 a,b,c 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\displaystyle\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}\,dt}=c\,(c\neq 0)$。

2.4.1-004 1990 数二; 880 基础选择 6

(1) 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则 ( )

A. $a=1,b=1$　　**B.** $a=-1,b=1$　　**C.** $a=1,b=-1$　　**D.** $a=-1,b=-1$

2.4.1-005 1994 数一

(4) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有（　）

A. $b=4d$　　**B.** $b=-4d$　　**C.** $a=4c$　　**D.** $a=-4c$

2.4.1-006 1994 数二

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则 ( )

A. $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　**B.** $a=0,b=-2$　　**C.** $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　**D.** $a=1,b=-2$

2.4.1-007 1996 数一

设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$_____

2.4.1-008 2001 数三; 880 第二章综合填空 5

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，求 c 的值。

2.4.1-009 2010 数三

(1) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)\mathrm{e}^x\right]=1$，则 a 等于 ( )

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.4.1-010 2004 数三

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$_____，$b=$_____。

2.4.1-011 2011 数二

已知函数 $F(x)=\dfrac{\displaystyle\int_0^x \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$。设 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)=0$，试求 α 的取值范围。

2.4.1-012 2013 数一

(1) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则 ( )

A. $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　**B.** $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　　**C.** $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　**D.** $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

2.4.1-013 2018 数一

若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，则 $k=$_____

2.4.1-014 2018 数二

（1）若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{e}^x+ax^2+bx\right)^{\frac{1}{x^2}}=1$，则（　　）

A. $a=\dfrac{1}{2},b=-1.$　　**B.** $a=-\dfrac{1}{2},b=-1.$　　**C.** $a=\dfrac{1}{2},b=1.$　　**D.** $a=-\dfrac{1}{2},b=1.$

2.4.1-015 2018 数三

已知实数 a,b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求 a,b。

2.4.1-016 2024 数一

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+ax^2\right)^{\sin x}-1}{x^3}=6$，则 $a=$_____.

2.4.1-017 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.9】(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\sin 2x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^2}{x^n}=a(a\neq 0)$，求 a,n；

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan 3x^2)^{\frac{1}{x^2}}-e^3}{x^n}=a(a\neq 0)$，求 a,n。

2.4.1-018 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 1.3】设 $y=y(x)$ 为微分方程 $y''+(x+1)y'+x^2y=e^x$ 满足初始条件 $y(0)=0$，$y'(0)=1$ 的特解. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{y(x)-x}{x^k}=c(c\neq 0)$，则 $c=$_____，$k=$_____.

2.4.1-019 880 第一章综合填空 9（重点）

设 $\lim\limits_{x\to 0}\left\{a[x]+\dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}\right\}=b$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $a=$_____，$b=$_____。

2.4.1-020 900 数二第一章 A 类 45

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(a[x]+\dfrac{4b}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{4+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{2}{x}}}\right)=1$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $ab=$_____。

2.4.1-021 26 版 660 数二第 572 题; 26 版 660 数一三第 196 题（重点）

设 a 与 b 是两个常数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt+a\right)=b$，则

A. a 为任意常数，$b=0$

B. $a=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，$b=0$

C. $a=0$，$b=1$

D. $a=-\sqrt{\pi}$，$b=0$

2.4.1-022 26 版 660 数一二三第 5 题; 880 第一章综合填空 8（重点）

设 a,b 为常数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^6}-ax^2-b\right)=0$，则 $a=$_____，$b=$_____。

2.4.1-023 26 版 1000 第一章基础 13

已知 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^3+ax^2-3x+6}{x+2}=b$，则 $ab=$_____。

2.4.1-024 26 版 1000 第一章强化 10

已知 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-3x^2+bx^2+x-3bx-3}{x+a}=25$，则 $ab=$_____.

2.4.1-025 26 版 660 数二第 512 题

若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^{x^2}-a}(\cos x-b)=A$，则

A. $a=1,b=0,A=1.$

B. $a=1,b=0,A=0.$

C. $a=0,b=1,A=1.$

D. $a=1,b=1,A=0.$

2.4.1-026 26 版 660 数一二三第 131 题

已知 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax^2+bx+1-e^{x^2-2x}}{x^2}=2$，则

A. $a=5,b=-2$

B. $a=-2,b=5$

C. $a=2,b=0$

D. $a=3,b=-3$

2.4.1-027 26 版 660 数一二三第 146 题

若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-\sqrt{\cos 2x}}{x^k}=a\neq0$，则

A. $k=2,a=1.$

B. $k=-2,a=-1.$

C. $k=2,a=-2.$

D. $k=2,a=-1.$

2.4.1-028 900 数二第一章 A 类 18

已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-ax)^{\frac{1}{2}}+(1-bx)^{\frac{1}{4}}-2}{x^2}=-2$，则 $|a|+|b|=$（　）

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

2.4.1-029 900 数二第一章 A 类 19

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^a}{(n+1)^b-n^b}=900$，则（　）

A. $a=-\dfrac{899}{900},b=\dfrac{1}{900}$　　**B.** $a=\dfrac{899}{900},b=-\dfrac{1}{900}$

C. $a=\dfrac{899}{900},b=\dfrac{1}{900}$　　**D.** $a=-\dfrac{899}{900},b=-\dfrac{1}{900}$

2.4.1-030 880 第一章综合选择 2

【2】已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\arctan x-\ln\dfrac{1+x}{1-x}}{x^p}=c\neq0$，则（　　）。

A. $p=3,c=-\dfrac{4}{3}$　　**B.** $p=-3,c=\dfrac{4}{3}$　　**C.** $p=\dfrac{4}{3},c=3$　　**D.** $p=-\dfrac{4}{3},c=-3$

2.4.1-031 26 版 660 数二第 435 题

设 a,b 为常数，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x^3}+\dfrac{a}{x^2}\right)=b$，则 $(a,b)=$_____。

2.4.1-032 26 版 1000 第一章强化 35

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x t^2\mathrm{e}^{x^2-t^2}\,dt+a\mathrm{e}^{x^2}}{x^b}=-\dfrac{1}{2}$，求 a,b 的值。

2.4.1-033 900 数二第一章 B 类 22

已知常数 $a>0,b>0$，若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2b^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{b}$，$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+bx}{1-bx}\right)^{\frac{b}{2ax}}=\dfrac{a}{b}$，则 $a=$_____，$b=$_____.

2.4.1-034 880 第一章综合选择 1

【1】$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}-1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^k-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=a\neq0$ 成立的充要条件是（　　）.

A. $k\neq1$　　**B.** $k>1$　　**C.** $k>0$　　**D.** 与 k 无关

2.4.1-035 880 第一章基础填空 4

设 $a>0$，知 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^P\left(a^{\frac{1}{x}}-a^{\frac{1}{x+1}}\right)$ 存在，则 P 的取值范围为_____

2.4.1-036 2021 数三

已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[a\arctan\dfrac{1}{x}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值。

2.4.1-037 26 版 1000 第一章强化 34

已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[a\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+(1+|x|)^{\frac{1}{x}}\right]$ 存在，求 a 的值。

2.4.1-038 北京市 2008 年竞赛题（重点）

设极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^n+1}\right]$ 存在，求 n 的值并求该极限。

2.4.1-039 姜晓千真题同源 150（重点）

设极限 $\lim\limits_{x\to0}\int_{-x}^{x}\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{|t|}{x}\right)\cos(\theta-t)\,dt$ 存在，求 θ 的值。

2.4.1-040 880 第一章综合解答 13（重点）

若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x\left[\dfrac{at^{1+t}}{(1+t)^t}-t\right]\mathrm{d}t=b$ 存在，$a>0$，求 a,b 的值。

2.4.1-041 900 数二第一章 A 类 58（重点）

已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(a\sin x)-b\cos x}{x^4}$ 存在，求 a,b 的值并计算该极限。

2.4.1-042 900 数二第一章 B 类 23

设 $a>0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sqrt{ae^{2|x|}+e^{|x|}}-a(x+\ln|x|)e^{|x|}}{\sqrt{x^2+\ln|x|}e^{|x|}}$ 存在，则 $a=$_____.

2.4.1-043 900 数二第一章 B 类 21（选做）

设函数 $f(x)=2x^3+x^2+1$，$x>0$，$x=f^{-1}(y)$ 为 $f(x)$ 的反函数，若正整数 k 满足 $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{f^{-1}(2t)}{\sqrt[k]{t}}$ 存在且非零，则 $k=$_____。

2.4.2 已知一极限，求另一极限

2.4.2-001 2000 数二

(4) 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为 (　)。

A. 0　　**B.** 6　　**C.** 36　　**D.** ∞

2.4.2-002 26 版 660 数一二三第 147 题

设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin6x-(\sin x)f(x)}{x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6-f(x)}{x^2}=$

A. 0　　**B.** 35　　**C.** 36　　**D.** ∞

2.4.2-003 26 版 1000 第一章基础 8

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+xf(x)}{x^3}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+f(x)}{x^2}=$（　）。

A. 0　　**B.** $-\dfrac{2}{3}$　　**C.** $\dfrac{4}{3}$　　**D.** ∞

2.4.2-004 2016 数三

已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{\mathrm{e}^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$_____。

2.4.2-005 26 版 660 数二第 434 题

设 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\ln(1+x)}-1}{\mathrm{e}^{2x^3}-1}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$_____。

2.4.2-006 2020 数三

(1) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$（　）。

A. $b\sin a$　　**B.** $b\cos a$　　**C.** $b\sin f(a)$　　**D.** $b\cos f(a)$

2.4.2-007 26 版 1000 第三章强化 19

设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos f(x)-\cos b}{x-a}=$_____.

2.4.2-008 880 第一章综合填空 4

设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-b}{x-a}=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}-\mathrm{e}^{b}}{x-a}=$_____。

2.4.2-009 900 数二第一章 A 类 44

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right]}{\mathrm{e}^{x}-1}=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=$_____。

2.4.2-010 900 数二第一章 B 类 12

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)+xf(x)}{x^4}=\dfrac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+f(x)}{x^3}=$（　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　**B.** 1　　**C.** 3　　**D.** 5

2.4.2-011 26 版 660 数一二三第 4 题

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{x}=3$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$_____。

2.4.2-012 26 版 1000 第一章强化 5

设 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+2x+3x^2+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^5$，则 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=$_____.

2.4.2-013 26 版 1000 第一章强化 11

设函数 $f(x)$ 在 $0<|x|<1$ 上有定义，且满足 $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x^2}}=\mathrm{e}^{-1}$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin^3 x}$。

2.4.2-014 880 第一章综合解答 18; 姜晓千真题同源 150（重点）

【18】求下列极限：

(I) 设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=\dfrac{1}{2}(a>0,a\neq1)$，求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$；

(II) 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有 $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{f(x)}{x-2a}=\lim\limits_{x\to4a}\dfrac{f(x)}{x-4a}=1(a\neq0)$，求 $\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$。

2.4.3 已知极限求函数值

2.4.3-001 2008 数二

已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$_____

2.4.4 已知极限求导数

2.4.4-001 1997 数一二

设函数 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

2.4.4-002 2020 数二; 26 版 660 数一二三第 52 题

已知函数 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，求 $g'(x)$ 并证明 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

2.4.4-003 1995 数三; 880 第二章基础选择 16

（1）设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为（　　）

A. 2　　**B.** -1　　**C.** $\dfrac{1}{2}$　　**D.** -2

2.4.4-004 26 版 660 数一二三第 40 题; 26 版 1000 第五章强化 2

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为_____。

2.4.4-005 26 版 660 数一二三第 28 题

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\mathrm{e}^x-1}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的法线方程为_____。

2.4.4-006 26 版 1000 第三章基础 8

设函数 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{\ln x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为_____。

2.4.4-007 2006 数三

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　）

A. $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在　　**B.** $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在

C. $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在　　**D.** $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在

2.4.4-008 2022 数二

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\mathrm{e}^{x^2}\right)-3f\left(1+\sin^2 x\right)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$。

2.4.4-009 26 版 1000 第三章强化 20

已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$。

2.4.4-010 2025 数二

（本题满分 12 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$。证明：$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$。

2.4.4-011 880 第二章基础解答 13

【13】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-(1+x)^{2x}+1}{x^2}=1$. 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，并求 $f'(0)$.

2.4.4-012 880 第二章基础填空 6

设 $f'(0)$ 存在，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{1-\cos f(x)}{\sin x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，则 $f'(0)=$_____

2.4.4-013 26 版 660 数一二三第 153 题

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{f(x)}-\cos x+\sin x}{x}=0$，则 $f'(0)$

A. $=1$　　**B.** $=-1$　　**C.** $=0$　　**D.** 不存在

2.4.4-014 26 版 660 数一二三第 167 题

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有定义，且 $f(0)=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-x)+f(x)\sin x}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=0$，则 $f'(0)=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　**B.** $-\dfrac{1}{2}$　　**C.** 2　　**D.** -2

2.4.4-015 26 版 1000 第三章强化 21

设 $f(x)$ 是非负连续函数，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^2(x)-a}{x^2-a^2}=1\ (a>0)$，求 $f'(a)$。

2.4.4-016 26 版 1000 第四章强化 11

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x}{1-\cos x}=2$，则 $f''(0)=$_____.

2.4.4-017 26 版 1000 第三章基础 3

设连续函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-1)}{f(3-x)}=2$，且 $f(1)=0$，则 $f'(1)$ 的值为（　　）.

A. 2　　**B.** -2　　**C.** $\dfrac{1}{2}$　　**D.** $-\dfrac{1}{2}$

2.4.4-018 880 第二章基础填空 17; 880 第二章基础选择 3

设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(2x-1)}{x-1}=1$，则 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f\left[(1+\sin t)^2\right]-f(1+\sin t)}{t}=$_____。

2.4.4-019 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 2.7】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，反函数为 $x=\varphi(y)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x-1}{x^2}=1$，则 $\varphi''(1)=$_____。

2.4.4-020 26 版 660 数一二三第 154 题

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在 3 阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\tan x-\sin x}=1$。则 $f'''(0)=$

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.4.5 已知极限，推导其他

2.4.5-001 1990 数一; 880 第二章基础选择 11

【11】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）。

A. 不可导　　**B.** 可导且 $f'(0)\neq 0$

C. 有极小值　　**D.** 有极大值

2.4.5-002 1987 数一

(3) 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处（　　）

A. $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　**B.** $f(x)$ 取得极大值

C. $f(x)$ 取得极小值　　**D.** $f(x)$ 的导数不存在

2.4.5-003 880 第二章综合选择 12

【12】设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}=1$，则（　　）。

A. 当 n 为奇数时，x_0 是 $f(x)$ 的极大值点
B. 当 n 为奇数时，x_0 是 $f(x)$ 的极小值点
C. 当 n 为偶数时，x_0 是 $f(x)$ 的极小值点
D. 当 n 为偶数时，x_0 是 $f(x)$ 的极大值点

2.4.5-004 1996 数一

(2) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则（　　）

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值。
B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值。
C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。
D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点。

2.4.5-005 2001 数三

(1) 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则（　）

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
C. $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.
D. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

2.4.5-006 2004 数一二; 26 版 660 数一二三第 150 题; 880 第二章基础选择 19

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使得（　　）

A. $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加
B. $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少
C. 对任意的 $x\in(0,\delta)$，有 $f(x)>f(0)$
D. 对任意的 $x\in(-\delta,0)$，有 $f(x)>f(0)$

2.4.5-007 26 版 1000 第三章强化 23

设连续函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，$f(x_0)=x_0^2$，$f'(x_0)>2x_0$，则存在 $\delta>0$，使
① $f(x)-x^2$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 单调增加；
② $f(x)-x^2$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 单调减少；
③ 对任意 $x\in(x_0,x_0+\delta)$，有 $f(x)>x^2$；
④ 对任意 $x\in(x_0-\delta,x_0)$，有 $f(x)<x^2$。
以上成立的全部序号是（　　）。

A. ①② **B.** ③④ **C.** ①③ **D.** ②④

2.4.5-008 2022 数一

(1) 已知 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}=1$，则（　）

A. $f(1)=0$.
B. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0$.
C. $f'(1)=1$.
D. $\lim\limits_{x\to 1}f'(x)=1$.

2.4.5-009 26 版 1000 第一章强化 36

设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{e^{x-1}-1}=1$，则（　　）。

A. $f(1)=0$　　**B.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=0$　　**C.** $f'(1)=0$　　**D.** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$

2.4.5-010 880 第二章综合选择 7

【7】设 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1$，则（　　）.

A. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 存在　　**B.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 不存在

C. $f'(0)=0$，$f''(0)=2$　　**D.** $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

2.4.5-011 25 版 660 数一二三第 160 题

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f'(1)=0$，$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f''(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{2}$，则

A. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值。

B. $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值。

C. $(1,f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标。

D. $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(1,f(1))$ 不是曲线 $f(x)$ 的拐点坐标。

2.4.5-012 900 第二章数二 A 类 32

设函数 $f(x)$ 二阶可导，满足 $f'(a)=0$ 且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{x-a}=1$，则（　　）

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点

B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

D. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

2.4.5-013 26 版 1000 第五章强化 38

设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内连续，且有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[f(x+2)+\mathrm{e}^{x^2}\right]}{1-\cos x}=4$，则 $x=2$ 是 $f(x)$ 的（　　）。

A. 不可导点　　**B.** 驻点且是极大值点

C. 驻点且是极小值点　　**D.** 可导点但不是驻点

2.4.5-014 26 版 1000 第一章基础 6

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-f(x-1)-1}{\ln x}=1$，则以下结论：

① $f(0)=0$；

② $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$；

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$；

④ 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 x 的高阶无穷小。

所有正确结论的序号为（　　）。

A. ①②　　**B.** ②④　　**C.** ③④　　**D.** ②③

2.4.5-015 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 2.18】设 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(f(x+2)+e^{x^2}\right)}{1-\cos x}=4$，证明 $x=2$ 是 $f(x)$ 的驻点也是极值点。

2.4.5-016 26 版 1000 第五章基础 12

设 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=k(k<0)$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处（　　）。

A. 导数不存在
B. 导数存在，且 $f'(0)\neq 0$
C. 取得极小值
D. 取得极大值

2.4.5-017 880 第二章综合选择 22

【22】设 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)=1$，则（　　）。

A. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必可导且 $f'(x_0)=1$
B. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必连续但不可导
C. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处必存在极限但不连续
D. $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的某去心邻域内单调递增

2.4.5-018 900 第二章数二 B 类 9

已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x+xf(x)}{x^3}=0$, 则下列选项中, 正确的是 (　　)

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
C. 点 $(0,f(0))$ 是 $y=f(x)$ 的拐点.
D. $x=0$ 不是 $f(x)$ 的驻点.

2.4.5-019 900 第二章数二 A 类 13

设函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内具有二阶导数，且 $f''(a)\neq 0$，且存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}$ 均存在，且当 $x\neq a$ 时，$\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\geqslant 0$，则（　　）

A. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点
B. $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点
C. $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点
D. 无法确定 $x=a$ 是否为极值点

2.4.5-020 900 第二章数二 A 类 14

已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\mathrm{e}^{x^2}}=1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 ()

A. 不可导
B. 可导，且 $f'(0)\neq 0$
C. 取得极大值
D. 取得极小值

2.4.5-021 900 第二章数二 A 类 33

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则下列命题中，错误的是 ()

A. $f(0)=0$.
B. $f'(0)$ 存在.
C. $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0$.
D. 在 $x=0$ 附近，存在常数 $C>0$，使得 $|f(x)|<C|x|$.

2.4.5-022 26 版 1000 第五章强化 10

设 $f(x)$ 连续，当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{f(x)}-1$ 与 $x-\ln(1+x)$ 是等价无穷小量，以下结论：
① $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值；
② $(0,f(0))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点；
③ $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $\dfrac{1}{2}x^2$.
正确结论的个数为（　　）.

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.4.5-023 1996 数二

(3) 设 $f(x)$ 处处可导，则（　　）

A. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$。

B. 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$。

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$。

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$。

2.4.5-024 2002 数二

(4) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则 ( ).

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

C. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$

D. 当 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

2.4.5-025 2025 数一

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，则（　　）

A. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在。

B. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。

C. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。

D. 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 存在。

2.4.6 极限与导数互推

2.4.6-001 1989 数二

(6) 设 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）

A. $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

2.4.6-002 880 第二章基础选择 15

【15】设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）。

A. $\lim\limits_{x\to\infty}|x|\left[f\left(a+\dfrac{1}{|x|}\right)-f(a)\right]$ 存在

B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x^3)-f(a)}{x^2}$ 存在

C. $\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a-\Delta x)}{2\Delta x}$ 存在

D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(a+x^3)-f(a)}{\tan x^3}$ 存在

2.4.6-003 2001 数一

设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 ()

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在。

B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^{h})$ 存在。

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在。

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在。

2.4.6-004 26 版 660 数一二三第 164 题

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，$f(0)=0$，则下述条件能保证 $f'(0)$ 存在的是

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f\big[\ln(1-h)\big]$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f\big(\sqrt{1+h^2}-1\big)$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(\tan h-\sin h)$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\big[f(2h)-f(h)\big]$ 存在

2.4.6-005 900 第二章数二 B 类 2

设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的充分必要条件为 ()

A. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^3}f(\tan h-h)$ 存在

B. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(\ln(1+h)-h)$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(\arctan h-h)$ 存在

D. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(h)-f(-h)]$ 存在

2.4.6-006 2025 数二; 26 版 1000 第三章强化 24

设函数 $f(x)$ 连续，给出下列 4 个条件：① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在；② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-|f(0)|}{x}$ 存在；③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}$ 存在；④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在。其中可得到“$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导”的条件个数为（　　）

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2.4.6-007 2007 数一二三

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，以下命题错误的选项是（　　）

A. 假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

B. 假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

C. 假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

D. 假设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

2.4.6-008 26 版 660 数一二三第 149 题

设 $f(0)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x^2)}{x^2}$ 存在是 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的

A. 充分非必要条件

B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件

D. 既非充分又非必要条件

2.4.6-009 2020 数一

(2) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则 ()

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

B. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

C. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

D. 当 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

2.4.6-010 26 版 1000 第三章强化 4

设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且在点 $x=0$ 处连续，则以下结论：

① 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}=0$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导；

② 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$ 时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导；

③ 当 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sqrt[3]{x}}=0$。

所有正确结论的序号为（　　）。

A. ①　　**B.** ②　　**C.** ②③　　**D.** ①②

2.4.6-011 26 版 660 数二第 533 题

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{|x|}=1$，则

A. $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$f'(0)=0$

B. $f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$f'(0)\neq 0$

C. $f'_+(0)$，$f'_-(0)$ 均存在但 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$

D. $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 不存在

2.4.6-012 2024 数一

(4) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，则

A. 当 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$ 时，$f'(0)=m$。

B. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=m$。

C. 当 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$ 时，$f'(0)=m$。

D. 当 $f'(0)=m$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=m$。

2.4.6-013 900 数二第二章 B 类 3

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则下列命题中，错误的是（　　）

A. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$，则 $f'(0)=a$。

B. 若 $f(0)=0$，$f'(0)=a$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a$。

C. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$，则 $f''(0)=a$。

D. 若 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=a$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\dfrac{a}{2}$。

2.4.6-014 26 版 1000 第三章强化 17

设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，在 $x=a$ 的某去心邻域内可导，下述论断正确的是 ().

A. 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$，则 $f'(a)=A$

B. 若 $f'(a)=A$，则 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=A$

C. 若 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$，则 $f'(a)$ 不存在

D. 若 $f'(a)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\infty$

2.5 以极限形式给出的函数

2.5-001 1988 数一二

若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$_____

2.5-002 26 版 1000 第四章基础 13

设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t\sin x}$，则 $f'(x)=$_____.

2.5-003 26 版 1000 第四章基础 12

设 $f(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos t\cdot\left(\dfrac{n+t}{n-t}\right)^n$，则 $f'(0)=$_____.

2.5-004 2015 数二

(2) 函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 ( )

A. 连续.　　**B.** 有可去间断点.

C. 有跳跃间断点.　　**D.** 有无穷间断点.

2.5-005 2005 数一二

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内（　　）

A. 处处可导　　**B.** 恰有一个不可导点

C. 恰有两个不可导点　　**D.** 至少有三个不可导点

2.5-006 1998 数三

(2) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为 ( )

A. 不存在间断点　　**B.** 存在间断点 $x=1$

C. 存在间断点 $x=0$　　**D.** 存在间断点 $x=-1$

2.5-007 2024 数三

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+nx^{2n}}$，则 $f(x)$

A. 在 $x=1$，$x=-1$ 处都连续　　**B.** 在 $x=1$ 处连续，在 $x=-1$ 处不连续

C. 在 $x=1$，$x=-1$ 处都不连续　　**D.** 在 $x=1$ 处不连续，在 $x=-1$ 处连续

2.5-008 2004 数二

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$_____

2.5-009 880 第一章综合选择 16

【16】设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+2^{tx}}{1+2^{tx}}$，则 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$ 在 $x=0$ 处（　　）.

A. 可导　　**B.** 不连续　　**C.** 不可导但连续　　**D.** 无法判定

2.5-010 880 第二章综合选择 9

【9】设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\arctan(nx)}{\sqrt{n^2+nx}}$，则 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)\,dt$ 在 $x\in[-1,1]$ 上是（　　）.

A. 连续但不可导的奇函数　　**B.** 连续但不可导的偶函数

C. 可导的偶函数　　**D.** 可导的奇函数

2.5-011 26 版 660 数二第 521 题

函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ 的间断点及类型是

A. $x=1$ 为第一类间断点，$x=-1$ 为第二类间断点　　**B.** $x=\pm1$ 均为第一类间断点

C. $x=1$ 为第二类间断点，$x=-1$ 为第一类间断点　　**D.** $x=\pm1$ 均为第二类间断点

2.5-012 880 第一章基础解答 8

讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性.

2.5-013 26 版 660 数一二三第 19 题

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+1}{x^{2n+1}-x^n+x+4}$，则 $f(x)$ 的间断点为_____。

2.5-014 26 版 660 数二第 445 题

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)$ 的间断点是_____。

2.5-015 姜晓千真题同源 150

【例 1.28】判定下列函数的间断点及其类型：

(1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\arctan e^{nx}}{x^{2n}+1}$；

(2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2e^{(n+1)x}+1}{e^{nx}+x^n+1}$。

2.5-016 25 版 660 数一二三第 25 题

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$，则 $f(x)$ 的连续区间是_____。

2.5-017 26 版 1000 第一章基础 23

设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x+\mathrm{e}^{tx}}{1+\mathrm{e}^{tx}}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）.

A. 可去间断点　　**B.** 跳跃间断点　　**C.** 振荡间断点　　**D.** 无穷间断点

2.5-018 26 版 1000 第一章强化 13

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n^x\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right]$ 在 $x=1$ 处 ( ).

A. 左极限存在, 右极限不存在　　**B.** 左极限不存在, 右极限存在

C. 左、右极限都存在, 但不相等　　**D.** 连续

2.5-019 26 版 1000 第一章强化 40

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+(\cos\pi x+1)\sin\alpha x}{x^n+(\cos\pi x+1)}$，为使 $f(x)$ 对于一切 x 都连续，求常数 α 的最小正值。

2.5-020 26 版 1000 第三章基础 15

设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{n(x-1)}+ax+b}{5+\mathrm{e}^{n(x-1)}}$，求 $f(x)$ 并讨论 $f(x)$ 的连续性及可导性与 a,b 的关系.

2.6 根据含极限等式确定函数

2.6-001 26 版 660 数一二三第 16 题

设 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且有 $f(x)=\mathrm{e}^{-2x}+x^{\frac{2}{1-x}}\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则 $f(x)=$_____。

2.6-002 26 版 1000 第一章基础 18

已知 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ 存在，且 $f(x)=x^2+\mathrm{e}^x\lim\limits_{x\to1}f(x)$，则 $f(x)=$_____.

2.7 无穷小阶数

2.7.1 无穷小

▶ 2.7.1.1 无穷小概念题

2.7.1.1-001 2013 数三

（1）当 $x\to0$ 时，用“$o(x)$”表示比 x 高阶的无穷小量，则下列式子中错误的是（　　）

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　**B.** $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　**D.** $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

2.7.1.1-002 2022 数二三

(1) 若当 $x\to0$ 时，$\alpha(x),\beta(x)$ 是非零无穷小量，则以下的命题中

① 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

② 若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③ 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$；

④ 若 $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，

真命题的序号为（　　）

A. ①③.　　**B.** ①④.　　**C.** ①③④.　　**D.** ②③④.

2.7.1.1-003 26 版 1000 第一章强化 24

当 $x\to0$ 时, $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是非零且不相等的等价无穷小量, 以下 4 个结论:

① $\alpha(x)+\beta(x)=2\alpha(x)$;

② $\alpha(x)+\beta(x)=2\beta(x)$;

③ $\alpha(x)-\beta(x)=o(\alpha(x))$;

④ $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x))$.

所有正确结论的序号是 ( ).

A. ①③　　**B.** ③④　　**C.** ①②③④　　**D.** ②④

2.7.1.1-004 900 数二第一章 A 类 16

当 $x \to 0$ 时，若 $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \beta_1(x), \beta_2(x)$ 都是非零无穷小量，且 $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$，$\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$，则下列命题中，错误的是（　　）

A. 若 $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$，则 $\alpha_2(x) - \beta_2(x) = o(\alpha_2(x))$

B. 若 $\alpha_1(x) - \beta_1(x) = o(\alpha_1(x))$，则 $\alpha_2(x) \sim \beta_2(x)$

C. 若 $\alpha_1(x) \sim \beta_1(x)$，则 $\alpha_1(x) - \beta_1(x) \sim \alpha_2(x) - \beta_2(x)$

D. 若 $\alpha_1(x) = o(\beta_1(x))$，则 $\alpha_1(x) - \beta_1(x) \sim \alpha_2(x) - \beta_2(x)$

2.7.1.1-005 2025 数二

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x = 0$ 某去心邻域内有定义且恒不为 0，若 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x \to 0$ 时（　　）

A. $f(x) + g(x) = o(g(x))$

B. $f(x)g(x) = o(f^2(x))$

C. $f(x) = o(e^{g(x)} - 1)$

D. $f(x) = o(g^2(x))$

2.7.1.1-006 26 版 660 数二第 515 题

下列命题正确的是

A. 设在 $x = x_0$ 空心邻域 $\alpha(x)$ 为有界函数，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)\beta(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

B. 设 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷小，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = a \neq 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = \infty$

C. 设 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 为无穷大，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)\beta(x) = a$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

D. 设在 $x = x_0$ 空心邻域 $\alpha(x)$ 为无界函数，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x)\beta(x) = 0$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \beta(x) = 0$

2.7.1.1-007 900 数二第一章 B 类 17

设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，则下列命题中，错误的是 ()

A. 当 $x \to 0$ 时，若 $f(x) = o(1)$，则 $F(x) = o(x)$。

B. 当 $x \to 0$ 时，若 $F(x) = o(x)$，则 $f(x) = o(1)$。

C. 当 $x \to 0$ 时，若 $f(x) = o(1)$，则 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = o(x)$。

D. 当 $x \to 0$ 时，若 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = o(x)$，则 $f(x) = o(1)$。

2.7.1.1-008 900 数二第一章 B 类 16

设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处有定义，且 $f(0) = 0$，则下列命题中，错误的是（　　）

A. 当 $x \to 0$ 时，若 $f(x) \sim \sin^2 x$，则 $f'(0)$ 存在。

B. 若 $0 \leqslant f(x) \leqslant \sin^2 x$ 恒成立，则 $f'(0)$ 存在。

C. 若在 $[0, +\infty)$ 上 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$，在 $(-\infty, 0)$ 上 $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且当 $x \to 0$ 时，函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 都是 x 的同阶无穷小，则 $f(x)$ 也是 x 的同阶无穷小。

D. 当 $x \to 0$ 时，若 $f'(0)$ 存在且不为 0，则 $f(x)$ 是 x 的同阶无穷小。

2.7.1.1-009 26 版 1000 第一章强化 21

设 $\alpha(x)$ 是 $x \to 0$ 时的非零无穷小量，且 $\alpha(2x) - \alpha(x) = o(x)$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{x}$ 的值是 () .

A. 0　　**B.** 1　　**C.** ∞　　**D.** 0 或 ∞

▶ 2.7.1.2 无穷小比阶

▶ 2.7.1.2.1 两者相比

2.7.1.2.1-001 1989 数三

（1）设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时（　　）

A. $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量
B. $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量
C. $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量
D. $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

2.7.1.2.1-002 1992 数二

当 $x\to 0$ 时，$x-\sin x$ 是 x^2 的（　　）

A. 低阶无穷小
B. 高阶无穷小
C. 等价无穷小
D. 同阶但非等价无穷小

2.7.1.2.1-003 2021 数二三

（1）当 $x\to 0$ 时，$\int_0^{x^2}(e^{t^3}-1)\,dt$ 是 x^7 的（　　）。

A. 低阶无穷小
B. 等价无穷小
C. 高阶无穷小
D. 同阶但非等价无穷小

2.7.1.2.1-004 2013 数二

(1) 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 ( )

A. 比 x 高阶的无穷小量
B. 比 x 低阶的无穷小量
C. 与 x 同阶但不等价的无穷小量
D. 与 x 等价的无穷小量

2.7.1.2.1-005 900 数二第一章 A 类 15

设 $1-\mathrm{e}^{x^2}=x\tan\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是（　　）

A. 比 x 高阶的无穷小量
B. 比 x 低阶的无穷小量
C. 与 x 同阶但不等价的无穷小量
D. 与 x 等价的无穷小量

2.7.1.2.1-006 25 版 1000 第九章基础 12

若函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^{2x} f\left(x+\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$，则当 $x\to 0^+$ 时，$g(x)$ 是 $\sqrt{x}$ 的（　　）。

A. 高阶无穷小
B. 低阶无穷小
C. 等价无穷小
D. 同阶非等价无穷小

2.7.1.2.1-007 25 版 660 数一二三第 127 题

当 $n\to\infty$ 时，数列 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e$ 是 $\dfrac{1}{n}$ 的

A. 高阶无穷小　　**B.** 低阶无穷小
C. 等价无穷小　　**D.** 同阶但非等价无穷小

2.7.1.2.1-008 2007 数一二三

(1) 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是（　　）.

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　**B.** $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　**C.** $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　**D.** $1-\cos\sqrt{x}$

2.7.1.2.1-009 26 版 660 数三第 629 题; 26 版 660 数二第 569 题

当 $x \to 0$ 时，下述一些无穷小与 x^3 为同阶无穷小的是

A. $\alpha(x)=x^3+x^2$　　**B.** $\beta(x)=\dfrac{1-\cos x}{x}$
C. $\gamma(x)=\displaystyle\int_0^{\ln(1+x)}(e^{t^2}-1)\,dt$　　**D.** $\delta(x)=(1+\sin x)^{\ln(1+x)}-1$

2.7.1.2.1-010 1993 数一

(1) 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sin t^2\,dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　）

A. 等价无穷小　　**B.** 同阶但非等价的无穷小
C. 高阶无穷小　　**D.** 低阶无穷小

2.7.1.2.1-011 1997 数三

（1）设函数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,dt$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的（　　）

A. 低阶无穷小　　**B.** 高阶无穷小
C. 等价无穷小　　**D.** 同阶但不等价的无穷小

2.7.1.2.1-012 1999 数二; 880 第三章基础填空 7

(2) 设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$, $\beta(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$, 则当 $x\to 0$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 ( )

A. 高阶无穷小　　**B.** 低阶无穷小
C. 同阶但不等价的无穷小　　**D.** 等价无穷小

2.7.1.2.1-013 26 版 660 数二第 570 题

设 $f(x)$ 可导，$f(0)=0$，$f'(0)=2$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x t^2 f(x^3-t^3)\,dt$，$g(x)=\dfrac{x^7}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$F(x)$ 是 $g(x)$ 的

A. 低阶无穷小　　**B.** 高阶无穷小
C. 等价无穷小　　**D.** 同阶但非等价无穷小

2.7.1.2.1-014 26 版 1000 第一章基础 5

当 $x \to 0$ 时, $\mathrm{e} - \mathrm{e}^{\cos x}$ 是 $\sqrt[3]{1+x^2}-1$ 的 ( ).

A. 高阶无穷小　　**B.** 低阶无穷小

C. 同阶但非等价无穷小　　**D.** 等价无穷小

2.7.1.2.1-015 26 版 1000 第一章强化 25

当 $x \to 0$ 时，$(3+2\tan x)^x - 3^x$ 是 $3\sin^2 x + x^3 \cos\dfrac{1}{x}$ 的（　　）。

A. 高阶无穷小　　**B.** 低阶无穷小

C. 等价无穷小　　**D.** 同阶但非等价无穷小

2.7.1.2.1-016 26 版 1000 第一章强化 7

设 $f(x), g(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小，则当 $x \to 0$ 时，$\displaystyle\int_0^x f(t)(1-\cos t)\,dt$ 是 $\displaystyle\int_0^x t^2 g(t)\,dt$ 的（　　）。

A. 等价无穷小　　**B.** 同阶但非等价无穷小

C. 高阶无穷小　　**D.** 低阶无穷小

2.7.1.2.1-017 880 第三章基础选择 11（重点）

【11】设函数 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x = \displaystyle\int_0^t 2\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u, \\ y = \displaystyle\int_0^t \sin(t-u)\,\mathrm{d}u \end{cases}$ 确定，则当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 x^2 的（　　）。

A. 高阶无穷小　　**B.** 等价无穷小

C. 同阶但不等价无穷小　　**D.** 低阶无穷小

2.7.1.2.1-018 900 数二第一章 B 类 15（重点）

设函数 $f(x)$ 满足 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt + 2f(x) + f'(x) = e^{-x}\sin 2x$，且 $f(0)=f'(0)=0$，则当 $x \to 0$ 时，与 $f(x)$ 为同阶但不等价的无穷小量为 ()

A. $\sin 2x$　　**B.** $1-\cos 2x$　　**C.** $e^{x^2}-1$　　**D.** $\sqrt{1+x}-1$

2.7.1.2.1-019 880 第三章综合选择 13（重点）

【13】设 $f(x)$ 有连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)=6$，$\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{x^3} f(t)\,dt$，$\beta(x)=\left[\int_0^x f(t)\,dt\right]^3$，则当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是（　　）.

A. 同阶无穷小　　**B.** 等价无穷小　　**C.** 高阶无穷小　　**D.** 低阶无穷小

▶ 2.7.1.2.2 三者找最高

2.7.1.2.2-001 1992 数三

当 $x \to 0$ 时，下面四个无穷小量中，哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量？()

A. x^2　　**B.** $1-\cos x$　　**C.** $\sqrt{1-x^2}-1$　　**D.** $x-\tan x$

2.7.1.2.2-002 2020 数一二

当 $x \to 0^+$ 时，下列无穷小中最高阶的是（　　）

A. $\int_0^x (e^{t^2}-1)\mathrm{d}t$　　**B.** $\int_0^x \ln(1+\sqrt{t^3})\mathrm{d}t$

C. $\int_0^{\sin x} \sin t^2 \mathrm{d}t$　　**D.** $\int_0^{1-\cos x} \sqrt{\sin^3 t}\mathrm{d}t$

2.7.1.2.2-003 26 版 1000 第一章强化 26

当 $x \to 0$ 时，以下无穷小中，阶数最高的是（　　）。

A. $\int_0^{\sin x} (1+t)^{\frac{2}{t}}\,dt$　　**B.** $\int_0^{\ln(1+x^2)} \sqrt{\cos^3 t}\,dt$

C. $\int_0^x (e^{\cos t}-e^{\sin t})\,dt$　　**D.** $\int_0^{x-\tan x} \arctan t\,dt$

2.7.1.2.2-004 26 版 660 数一二三第 176 题

当 $x \to 0$ 时下列无穷小中阶数最高的是

A. $(1+x)^{x^2}-1$　　**B.** $e^{x^4-2x}-1$

C. $\int_0^{x^2} \sin t^2\,dt$　　**D.** $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$

▶ 2.7.1.2.3 三者排序

2.7.1.2.3-001 2004 数一二

（7）把 $x \to 0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2} \tan\sqrt{t}\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}} \sin t^3\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是（　　）。

A. α,β,γ　　**B.** α,γ,β　　**C.** β,α,γ　　**D.** β,γ,α

2.7.1.2.3-002 26 版 660 数三第 630 题

将 $x \to 0^+$ 时的三个无穷小量 $\alpha=\int_0^x \cos t^2\,dt$，$\beta=\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$，$\gamma=\sqrt{1-x^2}-1$ 排列起来，使得排在后面一个是前面一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是

A. α,β,γ　　**B.** α,γ,β　　**C.** β,α,γ　　**D.** β,γ,α

2.7.1.2.3-003 2016 数二

（1）设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$。当 $x \to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（　　）

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　**B.** $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　**C.** $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　**D.** $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

2.7.1.2.3-004 880 第一章综合选择 3

【3】设当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)=\tan x-\sin x$，$\beta(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$，$\gamma(x)=\int_0^{1-\cos x} \sin t\,dt$ 都是无穷小，将它们关于 x 的阶数从低到高排列，正确的顺序为（　　）。

A. $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x)$　　**B.** $\alpha(x),\gamma(x),\beta(x)$

C. $\gamma(x),\alpha(x),\beta(x)$　　**D.** $\beta(x),\alpha(x),\gamma(x)$

2.7.1.2.3-005 900 数二第一章 A 类 12

设 $\alpha_1=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$，$\alpha_2=\int_0^{x^4}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$，$\alpha_3=\int_0^{x^2}\sin t^2\,dt$。当 $x\to 0$ 时，以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是（）

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　**B.** $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$　　**C.** $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　**D.** $\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2$

2.7.1.2.3-006 900 数二第一章 A 类 14

设 $\alpha_1=\sqrt{x+\sqrt{x}}$, $\alpha_2=\sqrt[3]{x\tan(x+\sqrt{x})}$, $\alpha_3=1-\cos\sqrt{x}$. 当 $x\to 0^+$ 时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ( )

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　**B.** $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$　　**C.** $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　**D.** $\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2$

2.7.1.2.3-007 900 数二第一章 A 类 13（重点）

设 $\alpha_1=\int_0^{x^2}\mathrm{d}u\int_0^u\arctan t\,\mathrm{d}t$，$\alpha_2=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^{u^2}\arctan t\,\mathrm{d}t$，$\alpha_3=\int_0^x\mathrm{d}u\int_0^u\arctan t^2\,\mathrm{d}t$。当 $x\to 0$ 时，以上三个无穷小量按照从高阶到低阶的排序是（）

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　**B.** $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2$　　**C.** $\alpha_3,\alpha_1,\alpha_2$　　**D.** $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

▶ 2.7.1.3 确定参数或阶数

▶ 2.7.1.3.1 已知高阶

2.7.1.3.1-001 2002 数一

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值。

2.7.1.3.1-002 2002 数二

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且 $f(0)\neq 0$，$f'(0)\neq 0$，$f''(0)\neq 0$。证明：存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当 $h\to 0$ 时，$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小。

2.7.1.3.1-003 2006 数二

试确定 A,B,C 的值，使得 $\mathrm{e}^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3)$，其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小。

2.7.1.3.1-004 2014 数二

(1) 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小量，则 α 的取值范围是（　　）

A. $(2,+\infty)$　　**B.** $(1,2)$　　**C.** $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　**D.** $\left(0,\frac{1}{2}\right)$

2.7.1.3.1-005 1996 数二

(1) 设当 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则（　）

A. $a=\frac{1}{2},b=1$.　　**B.** $a=1,b=1$.　　**C.** $a=-\frac{1}{2},b=-1$.　　**D.** $a=-1,b=1$.

2.7.1.3.1-006 2014 数三

(3) 设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$. 当 $x\to 0$ 时, 若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量, 则下列选项中错误的是 ( )

A. $a=0$. **B.** $b=1$. **C.** $c=0$. **D.** $d=\dfrac{1}{6}$.

2.7.1.3.1-007 880 第一章基础填空 7

【7】设 $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3-\tan x$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则 $a+b+c+d=$_____

2.7.1.3.1-008 2001 数二

(2) 设当 $x\to 0$ 时, $(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小, $x\sin x^n$ 是比 $\mathrm{e}^{x^2}-1$ 高阶的无穷小, 则正整数 n 等于 (　).

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

2.7.1.3.1-009 880 第一章基础选择 7

【7】设当 $x\to 0$ 时，$(x-\sin x)\tan x$ 是比 $\ln(1+x^n)$ 高阶的无穷小，而 $\ln(1+x^n)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则 $n=$(　)。

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

2.7.1.3.1-010 900 数二第一章 A 类 59

已知当 $x\to 0^+$ 时，$\arcsin^\alpha x$，$(x-\sin x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均为比 x 高阶的无穷小量，且函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\arcsin^\alpha x}{x^\beta(x-\sin x)^{\frac{1}{\alpha}}}, & x>0,\\ \gamma, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

若 α 为整数，且 $f(x)$ 连续，求 $\alpha\beta\gamma$。

▶ 2.7.1.3.2 已知同阶

2.7.1.3.2-001 1996 数一

（4）设 $f(x)$ 有连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\displaystyle\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\,dt$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于（　　）

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

2.7.1.3.2-002 1997 数二

（1）设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为（　　）

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

2.7.1.3.2-003 2012 数二

已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sin x}-\dfrac{1}{x}$，记 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$。

（I）求 a 的值；

（II）若当 $x \to 0$ 时，$f(x)-a$ 与 x^k 是同阶无穷小量，求常数 k 的值。

2.7.1.3.2-004 2019 数一二三

(1) 当 $x \to 0$ 时，若 $x-\tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$（　　）

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2.7.1.3.2-005 2024 数三

当 $x \to 0$ 时，$\int_0^x \frac{(1+t^2)\sin t^2}{1+\cos^2 t}\,dt$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k=$_____。

2.7.1.3.2-006 26 版 660 数一二三第 44 题

已知当 $x \to 0$ 时 $F(x)=\int_0^{x-\sin x} \ln(1+t)\,dt$ 是 x^n 的同阶无穷小，则 $n=$ _____。

2.7.1.3.2-007 900 数二第一章 A 类 42

当 $x \to \infty$ 时，$\left[\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}\right]^x-\sqrt{\mathrm{e}}$ 与 x^k 是同阶无穷小量，则 $k=$_____。

2.7.1.3.2-008 880 第二章基础填空 8

当 $x \to 0$ 时，$\mathrm{e}^x+\ln(1-x)-1$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 $n=$_____。

2.7.1.3.2-009 26 版 1000 第一章强化 20

设当 $x \to 0$ 时，$f(x)=\int_0^x \sin(tx)^2\,dt$ 与 x^n 是同阶无穷小，则正整数 $n=$_____。

2.7.1.3.2-010 26 版 660 数一二三第 194 题

设 $f(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{\sin t}\,\mathrm{d}t$，则当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 为 x 无穷小的阶数为

A. 一阶　　**B.** 二阶　　**C.** 三阶　　**D.** 四阶

2.7.1.3.2-011 26 版 660 数三第 584 题

当 $x \to 0$ 时，连续函数 $f(x)$ 为二阶无穷小，$\int_0^{\sqrt[3]{x}} f(t)\,dt$ 为 k 阶无穷小，则 $k=$_____。

2.7.1.3.2-012 26 版 660 数二第 516 题

设 $0<\alpha<\beta$，则当 $n \to \infty$ 时，$\frac{(n+1)^\alpha-n^\alpha}{n^\beta}$ 是 $\frac{1}{n}$ 的 m 阶无穷小，$m=$

A. $\beta-\alpha$　　**B.** $\beta-\alpha+1$　　**C.** $\beta-\alpha+2$　　**D.** $\beta+\alpha$

2.7.1.3.2-013 880 第一章综合填空 3

【3】设 $f(x)$ 是连续函数，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，当 $x\to0$ 时，$\int_0^{\sin^2 x}f(t)\,dt$ 是关于 x 的 n 阶无穷小，则 $n=$_____

2.7.1.3.2-014 880 第一章综合填空 1

当 $x\to0$ 时，$f(x)=3x-4\sin x+\sin x\cos x$ 是关于 x 的_____ 阶无穷小。

2.7.1.3.2-015 26 版 660 数一二三第 43 题

设 $f(x)$ 连续，当 $x\to a$ 时，$f(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小，则当 $x\to a$ 时 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $x-a$ 的 ____ 阶无穷小.（填阶数）

2.7.1.3.2-016 25 版 660 数一二三第 139 题

设 $x\to a$ 时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别是 $x-a$ 的 n 阶与 m 阶无穷小，则下列命题

① $f(x)g(x)$ 是 $x-a$ 的 $n+m$ 阶无穷小。

② 若 $n>m$，则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 是 $x-a$ 的 $n-m$ 阶无穷小。

③ 若 $n\leqslant m$，则 $f(x)+g(x)$ 是 $x-a$ 的 n 阶无穷小。

④ 若 $f(x)$ 连续，则 $\int_a^x f(t)\,dt$ 是 $x-a$ 的 $n+1$ 阶无穷小。

中，正确的个数是

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2.7.1.3.2-017 880 第一章基础选择 8

【8】当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-\dfrac{1+ax^2}{1+bx}$ 与 x^3 是同阶无穷小，则（　　）.

A. $a=\dfrac12,b=1$　　**B.** $a=-\dfrac12,b=1$　　**C.** $a=\dfrac12,b=-1$　　**D.** $a=-\dfrac12,b=-1$

▶ 2.7.1.3.3 已知等价

2.7.1.3.3-001 2009 数一二三

(2) 当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则（　　）

A. $a=1,b=-\dfrac16$　　**B.** $a=1,b=\dfrac16$　　**C.** $a=-1,b=-\dfrac16$　　**D.** $a=-1,b=\dfrac16$

2.7.1.3.3-002 2011 数二三

（1）已知当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小量，则（　　）

A. $k=1,c=4$　　**B.** $k=1,c=-4$　　**C.** $k=3,c=4$　　**D.** $k=3,c=-4$

2.7.1.3.3-003 2023 数一二

当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=e^{x^2}-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$____

2.7.1.3.3-004 1991 数一; 880 第一章基础填空 2

当 $x \to 0$ 时，$\left(1+ax^2\right)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则 $a=$_____

2.7.1.3.3-005 2005 数二

当 $x \to 0$ 时，$\alpha(x)=kx^2$ 与 $\beta(x)=\sqrt{1+x\arcsin x}-\sqrt{\cos x}$ 是等价无穷小，则 $k=$_____

2.7.1.3.3-006 2003 数二

若 $x \to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$_____

2.7.1.3.3-007 2015 数一二三

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$。若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \to 0$ 时是等价无穷小，求 a,b,k 的值。

2.7.1.3.3-008 2020 数三

已知 a,b 为常数，若 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}$ 与 $\dfrac{b}{n^a}$ 在 $n \to \infty$ 时是等价无穷小，求 a,b。

2.7.1.3.3-009 26 版 1000 第一章强化 23

当 $n \to \infty$ 时，$\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 与 $\dfrac{c}{n^k}$ 为等价无穷小，则 ().

A. $c=\dfrac{\mathrm{e}}{3},k=2$　　**B.** $c=\dfrac{\mathrm{e}}{2},k=2$

C. $c=\dfrac{\mathrm{e}}{3},k=1$　　**D.** $c=\dfrac{\mathrm{e}}{2},k=1$

2.7.1.3.3-010 900 数二第一章 A 类 41

已知当 $x \to 0^+$ 时，$e^x+2\cos\sqrt{x}-3$ 是 $1-\cos ax$ 的等价无穷小，则 $a^2=$_____。

2.7.1.3.3-011 26 版 660 数一二三第 428 题

当 $x \to 0$ 时，$x-\sin x\cos x\cos 2x$ 与 ax^n 为等价无穷小，则 $a=$_____，$n=$_____

2.7.1.3.3-012 2013 数二三

当 $x \to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 ax^n 为等价无穷小量，求 n 与 a 的值。

2.7.1.3.3-013 900 数二第一章 A 类 40

已知当 $x \to 1$ 时，$x^{100}-1$ 是 $x^{kx}-1$ 的等价无穷小，则 $k=$ _____。

2.7.1.3.3-014 880 第二章基础填空 7

当 $x \to 0$ 时，$x-\sin x\cos x$ 与 ax^b 为等价无穷小，则 $a=$_____，$b=$_____

2.7.1.3.3-015 26 版 1000 第一章强化 8

当 $x \to 0$ 时，$a\int_0^{x^2}\cos t^2\,dt$ 与 $\sin x-b\ln(1+x)$ 是等价无穷小，则 $(a,b)=$（　）。

A. $(1,2)$　　**B.** $(-1,2)$　　**C.** $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　**D.** $\left(-\frac{1}{2},1\right)$

2.7.1.3.3-016 26 版 1000 第一章强化 9

设当 $x \to 0$ 时，$\int_0^x\left(e^{t\cos t^2}-e^t\right)dt$ 与 ax^b 是等价无穷小量，则 $(a,b)=$（　）.

A. $\left(-\frac{1}{6},3\right)$　　**B.** $\left(-\frac{1}{24},4\right)$　　**C.** $\left(-\frac{1}{2},5\right)$　　**D.** $\left(-\frac{1}{12},6\right)$

2.7.1.3.3-017 26 版 1000 第一章强化 27

当 $x \to 0$ 时，函数 $f(x)=ax+bx^2+\ln(1+x)$ 与 $g(x)=1-\cos x$ 是等价无穷小，则 $ab=$ _____.

2.7.1.3.3-018 26 版 1000 第一章强化 28

当 $x \to 0$ 时，$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}-\arctan x$ 与 $g(x)=ax^b$ 是等价无穷小，则 $ab=$_____.

2.7.1.3.3-019 26 版 1000 第一章强化 29

当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x)-\tan x$ 与 ax^b 是等价无穷小，则 $(a,b)=$（　）.

A. $\left(-\frac{1}{2},2\right)$　　**B.** $\left(\frac{1}{2},2\right)$　　**C.** $\left(-\frac{1}{3},3\right)$　　**D.** $\left(\frac{1}{3},3\right)$

2.7.1.3.3-020 26 版 1000 第一章强化 31

当 $x \to 0$ 时，$\arcsin x-x$ 与 ax^b 是等价无穷小，则 $(a,b)=$（　）.

A. $\left(-\frac{1}{6},2\right)$　　**B.** $\left(\frac{1}{6},2\right)$　　**C.** $\left(-\frac{1}{6},3\right)$　　**D.** $\left(\frac{1}{6},3\right)$

2.7.1.3.3-021 26 版 1000 第一章基础 7

已知当 $x \to 0$ 时，ax^3 与 $\sqrt{1+x^2}-x\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)+b$ 为等价无穷小，则 $ab=$ _____.

2.7.1.3.3-022 26 版 660 数一二三第 195 题

已知当 $x \to 0^+$ 时 $g(x) = \int_0^1 e^{t^2 x}\,\mathrm{d}t - \left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{10}\right)$ 与 Ax^k 是等价无穷小，则

A. $k = 3, A = \frac{1}{42}$　　**B.** $k = 3, A = -\frac{1}{42}$　　**C.** $k = 2, A = \frac{1}{42}$　　**D.** $k = 2, A = -\frac{1}{42}$

2.7.1.3.3-023 900 数二第一章 A 类 57

已知当 $x \to 0$ 时，$ax^2 + bx^4 + c\int_0^x \frac{\sin t^2}{t}\,dt$ 与 x^6 是等价无穷小，求 $a + b + c$。

2.7.1.3.3-024 姜晓千基础例题

当 $x \to 0$ 时，$e^{-x^2} - \cos\sqrt{2}x \sim cx^k$，求 c, k。

2.7.1.3.3-025 26 版 1000 第一章强化 30

当 $x \to 0$ 时，$x - \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) \sim ax^b$，则 a, b 的值分别是（　　）。

A. $\frac{1}{6}, 3$　　**B.** $\frac{1}{6}, 2$　　**C.** $\frac{1}{3}, 2$　　**D.** $\frac{1}{3}, 3$

2.7.2 无穷大

▶ 2.7.2.1 无界与无穷大

2.7.2.1-001 1987 数二

（2）函数 $f(x) = x\sin x$（　）

A. 当 $x \to \infty$ 时为无穷大　　**B.** 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界

C. 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界　　**D.** 当 $x \to \infty$ 时有有限极限

2.7.2.1-002 1993 数二; 880 第一章基础选择 5

【5】当 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　）。

A. 无穷大　　**B.** 无穷小

C. 有界但非无穷小　　**D.** 无界但非无穷大

▶ 2.7.2.2 无穷大比阶

2.7.2.2-001 2010 数三

(4) 设 $f(x) = \ln^{10} x$, $g(x) = x$, $h(x) = e^{\frac{x}{10}}$, 则当 x 充分大时有 ( )

A. $g(x) < h(x) < f(x)$.　　**B.** $h(x) < g(x) < f(x)$.

C. $f(x) < g(x) < h(x)$.　　**D.** $g(x) < f(x) < h(x)$.

2.7.2.2-002 880 第一章基础选择 9

【9】设 $f(x) = \ln^2 x$，$g(x) = x$，$h(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}(x > 1)$，则当 x 充分大时，（　　）

A. $f(x) < g(x) < h(x)$　　**B.** $g(x) < h(x) < f(x)$

C. $h(x) < g(x) < f(x)$　　**D.** $g(x) < f(x) < h(x)$

2.7.2.2-003 900 数二第一章 A 类 17

当 $x \to +\infty$ 时，无穷大量 $I_1 = x^{x+1}$，$I_2 = x^{(x+1)^x}$，$I_3 = (x+1)^{x^x}$ 按照从高阶到低阶的排序是（　　）

A. I_1, I_2, I_3　　**B.** I_1, I_3, I_2　　**C.** I_2, I_1, I_3　　**D.** I_3, I_2, I_1

2.7.2.2-004 900 第二章数二 A 类 26

设函数 $f(x) = \ln^2 x$，$g(x) = \dfrac{1}{x}$，$h(x) = \cot^2 x$，则当 $x \to 0^+$ 时，有（　　）

A. $g(x) < h(x) < f(x)$　　**B.** $h(x) < g(x) < f(x)$

C. $f(x) < g(x) < h(x)$　　**D.** $g(x) < f(x) < h(x)$

2.8 渐近线

2.8-001 1989 数一二

(1) 当 $x > 0$ 时，曲线 $y = x \sin \dfrac{1}{x}$ ( )

A. 有且仅有水平渐近线.　　**B.** 有且仅有铅直渐近线.

C. 既有水平渐近线，也有铅直渐近线.　　**D.** 既无水平渐近线，也无铅直渐近线.

2.8-002 1991 数一; 880 第二章基础选择 23

(1) 曲线 $y = \dfrac{1 + \mathrm{e}^{-x^2}}{1 - \mathrm{e}^{-x^2}}$（　　）

A. 没有渐近线.　　**B.** 仅有水平渐近线.

C. 仅有铅直渐近线.　　**D.** 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

2.8-003 26 版 1000 第五章基础 21

曲线 $y = \dfrac{2 + \mathrm{e}^{-x^4}}{1 - \mathrm{e}^{-x^4}}$（　　）.

A. 仅有斜渐近线　　**B.** 仅有水平渐近线

C. 仅有铅直渐近线　　**D.** 既有水平渐近线，又有铅直渐近线

2.8-004 1994 数二三

(4) 曲线 $y = \mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}} \arctan \dfrac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x+2)}$ 的渐近线有 ( )

A. 1 条.　　**B.** 2 条.　　**C.** 3 条.　　**D.** 4 条.

2.8-005 1995 数二

曲线 $y = x^2 \mathrm{e}^{-x^2}$ 的渐近线方程为_____

2.8-006 1998 数二; 26 版 1000 第五章基础 8

曲线 $y = x \ln \left(\mathrm{e} + \dfrac{1}{x} \right) (x > 0)$ 的渐近线方程为_____

2.8-007 2023 数一二

(1) 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为 ( )

A. $y=x+e$　　**B.** $y=x+\dfrac{1}{e}$　　**C.** $y=x$　　**D.** $y=x-\dfrac{1}{e}$

2.8-008 2000 数二

曲线 $y=(2x-1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为_____

2.8-009 2005 数一

曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为_____

2.8-010 2005 数二

曲线 $y=\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$ 的斜渐近线方程为_____

2.8-011 2006 数二

曲线 $y=\dfrac{x+4\sin x}{5x-2\cos x}$ 的水平渐近线方程为_____

2.8-012 2007 数一二三

(5) 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为 (　).

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.8-013 2010 数二

曲线 $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$ 的渐近线方程为_____

2.8-014 2012 数一二三

曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 的渐近线的条数为 (　)

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

2.8-015 2014 数一二三

(2) 下列曲线中有渐近线的是 (　)

A. $y=x+\sin x$　　**B.** $y=x^2+\sin x$

C. $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　　**D.** $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

2.8-016 2016 数二

曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan\left(1+x^2\right)$ 的斜渐近线方程为_____

2.8-017 2017 数二

曲线 $y=x\left(1+\arcsin\dfrac{2}{x}\right)$ 的斜渐近线方程为_____

2.8-018 2020 数二

求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}(x>0)$ 的斜渐近线方程。

2.8-019 2022 数一三

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 的满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线。

2.8-020 2025 数二

曲线 $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$ 的渐近线方程为_____.

2.8-021 900 第二章数二 A 类 22（重点）

曲线 $y=\sqrt{2x^2+4x+1}$ 的渐近线的条数为（　　）

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

2.8-022 2025 数三

设 $g(x)$ 是函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3+x}{3-x}$ 的反函数，则曲线 $y=g(x)$ 的渐近线方程为_____。

2.8-023 25 版 660 数一二三第 48 题（重点）

曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线是_____。

2.8-024 900 第二章数二 B 类 34（重点）

曲线 $x^3+y^3=y^2$ 的斜渐近线方程为_____。

2.8-025 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 2.12】曲线 $y=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}+e^x}{e^{\frac{1}{x}}-e^x}\cdot\dfrac{\arctan x}{x}$ 有【　】

A. 三条渐近线和一个第一类间断点　　**B.** 三条渐近线和两个第一类间断点

C. 两条渐近线和两个第一类间断点　　**D.** 两条渐近线和一个第一类间断点

2.8-026 姜晓千真题同源 150（重点）

【例 2.13】求下列曲线的渐近线：

(1) $y=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+x^2}$；

(2) $y=\dfrac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}$。

2.8-027 26 版 660 数二第 538 题

曲线 $y=2x-\sqrt{x^2-1}$ 的斜渐近线为

A. $\begin{cases}y=-x, & x\to+\infty,\\ y=3x, & x\to-\infty.\end{cases}$　**B.** $\begin{cases}y=x, & x\to+\infty,\\ y=3x, & x\to-\infty.\end{cases}$

C. $\begin{cases}y=3x, & x\to+\infty,\\ y=x, & x\to-\infty.\end{cases}$　**D.** $\begin{cases}y=3x, & x\to+\infty,\\ y=-x, & x\to-\infty.\end{cases}$

2.8-028 26 版 660 数二第 558 题

曲线 $y=(x+2)\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}}$ 的渐近线情况是

A. 仅有水平渐近线.　**B.** 仅有铅直渐近线.

C. 既有铅直又有水平渐近线.　**D.** 既有铅直又有斜渐近线.

2.8-029 26 版 660 数一二三第 171 题

曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$

A. 既有铅直又有水平与斜渐近线.　**B.** 仅有铅直渐近线.

C. 只有铅直与水平渐近线.　**D.** 只有铅直与斜渐近线.

2.8-030 26 版 1000 第五章强化 15

曲线 $y=(5x-3)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ 有渐近线（　　）.

A. $x=0,y=5x+2$　**B.** $x=0,y=5x-8$　**C.** $x=0,y=5x-3$　**D.** $x=0,y=5x-2$

2.8-031 26 版 1000 第五章强化 16

曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-x+1}}{\mathrm{e}^x-1}$ 的渐近线共有 ( ).

A. 1 条　**B.** 2 条

C. 3 条　**D.** 4 条或 4 条以上

2.8-032 26 版 1000 第五章强化 17

曲线 $r(3\theta-\pi)=1$ 的斜渐近线为 ().

A. $y=\sqrt{2}x-\dfrac{3}{2}$　**B.** $y=\sqrt{2}x+\dfrac{3}{2}$　**C.** $y=\sqrt{3}x-\dfrac{2}{3}$　**D.** $y=\sqrt{3}x+\dfrac{2}{3}$

2.8-033 26 版 1000 第五章强化 18

曲线 $y=x^2\ln\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 的斜渐近线为 _____.

2.8-034 26 版 1000 第五章强化 19

求曲线 $y=x^2\left[\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}{\mathrm{e}}-1\right]$ $(x>0)$ 的斜渐近线。

2.8-035 26 版 1000 第五章强化 28

曲线 $y=x\ln\left(2+\dfrac{1}{x-1}\right)$ 的斜渐近线方程为 ( ).

A. $y=x\ln 2+1$　　**B.** $y=x\ln 2+\dfrac{1}{2}$　　**C.** $y=x\ln 2-1$　　**D.** $y=x\ln 2-\dfrac{1}{2}$

2.8-036 26 版 1000 第五章基础 7

曲线 $y(x)=\ln\left|\mathrm{e}^{2x}-1\right|$ 的斜渐近线为（　　）.

A. $y=2x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　**B.** $y=2x$

C. $y=-2x+\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　**D.** $y=-2x$

2.8-037 26 版 1000 第五章基础 20

曲线 $y=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$ 的渐近线的条数为 ( ).

A. 4　　**B.** 3　　**C.** 2　　**D.** 1

2.8-038 880 第二章基础选择 24

【24】设 $f(x)$ 为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x[1+x+f(x)]$ 存在，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线（　　）。

A. $y=x$　　**B.** $y=-x$　　**C.** $y=x+1$　　**D.** $y=-x-1$

2.8-039 880 第二章基础选择 25

【25】曲线 $y=\sqrt{x^2-a^2}$ 的渐近线的条数为（　　）.

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.8-040 880 第二章基础选择 18

【18】设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{ax^2-x+3}-2x\right)=b$，其中 a,b 为常数，$a>0$，则曲线 $y=\sqrt{ax^2-x+3}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的斜渐近线方程为_____。

2.8-041 880 第二章基础填空 25

【25】设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$ 确定，则曲线 $y=y(x)$ 的斜渐近线方程为_____。

2.8-042 900 第二章数二 A 类 20

下列曲线中有斜渐近线的是（　　）

A. $y=\ln x+\cos\dfrac{1}{x}$　　**B.** $y=x+\cos\dfrac{1}{x}$

C. $y=\ln\dfrac{1}{x}+\cos x$　　**D.** $y=\dfrac{1}{x}+\cos x$

2.8-043 900 第二章数二 A 类 21

曲线 $y=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线的条数为（　　）

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.8-044 900 第二章数二 A 类 23

曲线 $y=x\ln\dfrac{x}{x-1}+\ln[x(x-1)]$ 的渐近线的条数为 ( )

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

2.8-045 900 第二章数二 A 类 24

设函数 $y(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left[1-\dfrac{\ln(1-t)}{x^2}\right]^{\frac{x}{\sin t}}$，则下列关于曲线 $y=y(x)$ 的渐近线的说法中，正确的是（　　）

① 该曲线无渐近线．② 该曲线有铅直渐近线．③ 该曲线有水平渐近线．④ 该曲线有斜渐近线．

A. ②　　**B.** ③　　**C.** ②③　　**D.** ②④

2.8-046 900 第二章数二 A 类 25

设函数 $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x+b}$，$g(x)=\dfrac{x+\sqrt{x^2+4(1-b)x+a}}{2}$，则当 $x\to+\infty$ 时，下列关于曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的渐近线的结论中，正确的是（　　）

A. 没有公共斜渐近线.

B. 是否具有公共斜渐近线与 a,b 的取值有关.

C. 有公共斜渐近线，且公共斜渐近线的方程与 a 的取值有关.

D. 有公共斜渐近线，且公共斜渐近线的方程与 b 的取值有关.

2.8-047 900 第二章数二 A 类 64

曲线 $y=\dfrac{2x^5+x^3-1}{x^4+1}+\mathrm{e}^{\arctan x^2}$ 的斜渐近线方程为_____。

2.9 泰勒多项式

2.9-001 2021 数一

(3) 设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则（　）

A. $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$　　**B.** $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$

C. $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$　　**D.** $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$

2.9-002 26 版 1000 第一章基础 17

$f(x)=\dfrac{\tan x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为_____.

2.9-003 900 第二章数二 A 类 37

设函数 $f(x)=\dfrac{\tan x}{1-x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则（　　）

A. $a=1,b=0,c=-\dfrac{2}{3}$　　**B.** $a=1,b=0,c=\dfrac{2}{3}$

C. $a=1,b=0,c=-\dfrac{4}{3}$　　**D.** $a=1,b=0,c=\dfrac{4}{3}$

2.9-004 2021 数二

(5) 设函数 $f(x)=\sec x$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $1+ax+bx^2$，则 ( )

A. $a=1,b=-\dfrac{1}{2}$　　**B.** $a=1,b=\dfrac{1}{2}$　　**C.** $a=0,b=-\dfrac{1}{2}$　　**D.** $a=0,b=\dfrac{1}{2}$

2.9-005 莫斯科 1976 竞赛题; 880 第二章综合解答 8（重点）

【例 1.5】(莫斯科 1976 年竞赛题) 设 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to 0^+$ 时，$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$，则 $A=$_____，$B=$_____。

2.9-006 26 版 660 数一二三第 36 题

设 $f(x)=\ln\dfrac{1-2x}{1+3x}$，则 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点处的 n 次泰勒多项式为_____。

2.9-007 880 第二章基础填空 4

设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\sin x}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x}\right]=2$，则 $f(x)$ 的一阶麦克劳林展开式为_____。

2.9-008 880 第二章综合选择 24

【24】设 $f(x)$ 有连续的二阶导数，曲线 $y=f(x)$ 在其上点 $(0,1)$ 处的曲率圆方程为 $x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的二次泰勒多项式为（　　）.

A. $1-x^2$　　**B.** $1+x^2$　　**C.** $1-\dfrac{1}{2}x^2$　　**D.** $1+2x^2$

2.9-009 26 版 1000 第一章强化 33

设函数 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ 在 $x=0$ 处的 2 次泰勒多项式为 $a+bx+cx^2$，则（　　）.

A. $a=1,b=1,c=1$　　**B.** $a=1,b=1,c=\dfrac{1}{2}$

C. $a=0,b=-1,c=\dfrac{1}{2}$　　**D.** $a=0,b=-1,c=1$

2.9-010 26 版 1000 第一章强化 41

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$，则（　　）.

A. $a=1,b=0,c=\dfrac{1}{2}$　　**B.** $a=0,b=1,c=\dfrac{1}{2}$　　**C.** $a=0,b=\dfrac{1}{2},c=1$　　**D.** $a=\dfrac{1}{2},b=1,c=0$

2.9-011 26 版 1000 第五章基础 10

已知曲线 $y=f(x)$ 在其点 $(0,1)$ 处的曲率圆方程为 $(x-1)^2+y^2=2$，且当 $x\to 0$ 时，二阶可导函数 $f(x)$ 与 $a+bx+cx^2$ 的差为 $o\left(x^2\right)$，则（　　）.

A. $a=0,b=1,c=\dfrac{3}{2}$　　**B.** $a=1,b=0,c=1$

C. $a=1,b=1,c=-1$　　**D.** $a=1,b=0,c=-1$

2.9-012 900 第二章数二 A 类 36（选做）

设函数 $f(x)=\cot 2x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处的 3 次泰勒多项式为 $a+b\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+c\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2+d\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)^3$，则 $ac+bd=$（　　）

A. $-\dfrac{8}{3}$　　**B.** $\dfrac{8}{3}$　　**C.** $-\dfrac{16}{3}$　　**D.** $\dfrac{16}{3}$

3 连续

3.1 判断或讨论连续性

3.1-001 1987 数三

(1) 下列函数在其定义域内连续的是（　）

A. $f(x)=\ln x+\sin x$

B. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$

D. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

3.1-002 1992 数三

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}, & x\neq 1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续？若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续。

3.1-003 1995 数二

设 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 试讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

3.1-004 2003 数三

设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin \pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$。试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续。

3.1-005 880 第一章综合选择 6

【6】设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & x\neq \pm 1,\\ 0, & x=\pm 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$（　　）.

A. 在 $x=1,x=-1$ 处都连续
B. 在 $x=1,x=-1$ 处都间断
C. 在 $x=-1$ 处间断，$x=1$ 处连续
D. 在 $x=-1$ 处连续，$x=1$ 处间断

3.1-006 26 版 660 数一二三第 120 题

"$f(x)$ 在 x_0 点连续" 是 $|f(x)|$ 在 x_0 点连续的

A. 充分条件，但不是必要条件
B. 必要条件，但不是充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不是充分条件，也不是必要条件

3.1-007 26 版 1000 第一章基础 19

设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处连续，则应补充 $f(0)=$_____.

3.2 已知连续确定参数

3.2-001 1988 数二

设 $f(x)=\begin{cases}2x+a, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^x(\sin x+\cos x), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $a=$_____

3.2-002 2008 数三

设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & |x|\leq c\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$_____.

3.2-003 1994 数二; 880 第一章基础填空 3

若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$_____

3.2-004 1989 数二

设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\le 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 与 b 应满足的关系是_____。

3.2-005 1997 数二

已知函数 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\ne 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____

3.2-006 2002 数二

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ a\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____

3.2-007 2006 数二

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\displaystyle\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t, & x\ne 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$_____

3.2-008 26 版 660 数一二三第 10 题

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{ax^3}-1}{x-\arcsin x}, & x>0\\ 6, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点连续，则 $a=$_____。

3.2-009 1990 数三

(2) 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0$，$f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\ne 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 $A=$_____.

3.2-010 2000 数二

（1）设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+\mathrm{e}^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足（　　）

A. $a<0,b<0$　　**B.** $a>0,b>0$　　**C.** $a\leqslant 0,b>0$　　**D.** $a\geqslant 0,b<0$

3.2-011 2018 数二

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}2-ax, & x\le -1,\\ x, & -1<x<0,\\ x-b, & x\ge 0\end{cases}$，若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则（　）

A. $a=3,b=1$　　**B.** $a=3,b=2$　　**C.** $a=-3,b=1$　　**D.** $a=-3,b=2$

3.2-012 900 数二第一章 A 类 26

设函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2+ax^2, & x\leqslant -1,\\ x^2, & -1<x<0,\\ x^2-b, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 若 $f(x)+g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则（　　）

A. $a=1,b=1$　　**B.** $a=1,b=2$　　**C.** $a=-1,b=1$　　**D.** $a=-1,b=2$

3.2-013 26 版 660 数二第 506 题

设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ a, & x\geqslant 1\end{cases}$，$g(x)=\begin{cases}b, & x<0\\ x+2, & x\geqslant 0\end{cases}$，且 $f(x)+g(x)$ 为连续函数，则

A. $a=0,b=0$　　**B.** $a=2,b=1$　　**C.** $a=1,b=2$　　**D.** $a=-2,b=-1$

3.2-014 900 数二第一章 A 类 28

设函数 $f(x)=\begin{cases}a\cos x, & x\geqslant 0,\\ x+1, & x<0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2-b^2, & x\geqslant 0,\\ x+\pi, & x<0,\end{cases}$ 已知 $b\neq 0$，若 $f(x)$ 连续，且 $f(g(x))$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a^2+b^2=$（　）

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 5

3.2-015 2015 数二

(3) 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$. 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则（　）

A. $\alpha-\beta>1$.　　**B.** $0<\alpha-\beta\leqslant 1$.　　**C.** $\alpha-\beta>2$.　　**D.** $0<\alpha-\beta\leqslant 2$.

3.2-016 2017 数一二三

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则（　　）

A. $ab=\dfrac{1}{2}$　　**B.** $ab=-\dfrac{1}{2}$　　**C.** $ab=0$　　**D.** $ab=2$

3.2-017 900 数二第一章 A 类 27

若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+b\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，则（　　）

A. $a=0,b=0$　　**B.** $a\neq 0,b=0$

C. a 可以取任意值，$b=0$　　**D.** $a=0,b$ 可以取任意值

3.2-018 900 数二第一章 B 类 24

设当 $0<x\leqslant 1$ 时，函数 $f(x)=x^{\sin x}$，对于其他 x，$f(x)=2f(x+1)-\ln k$。若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $k=$_____。

3.2-019 900 数二第一章 A 类 46

设 k 为整数，函数 $f(x)=\dfrac{kx}{k+1+\mathrm{e}^{kx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在，则 $k=$_____。

3.2-020 880 第二章综合选择 23

【23】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x-1)^{\alpha}}\sin\dfrac{1}{(x-1)^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1\end{cases}$ $(\alpha<0,\beta>0)$，若 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则（　　）

A. $\alpha<-1$ 且 $\alpha+\beta<-1$
B. $\alpha<-1$ 且 $\alpha+\beta\leqslant -1$
C. $\alpha\leqslant -1$ 且 $\alpha+\beta<-1$
D. $\alpha\leqslant -1$ 且 $\alpha+\beta\leqslant -1$

3.2-021 26 版 1000 第一章基础 20

设 $f(x)=\dfrac{1-x\cdot 2^{1-x}}{(2-x)(1-x)}$ $(x\neq 1,2)$，若 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，则 $f(1)f(2)=$_____.

3.3 间断点

3.3-001 1990 数二

(5) 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的（）

A. 连续点
B. 第一类间断点
C. 第二类间断点
D. 连续点或间断点不能由此确定

3.3-002 1995 数二

(1) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则（ ）

A. $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.
B. $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.
C. $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.
D. $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

3.3-003 1996 数二

设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2, & x<-1,\\ x^3, & -1\leqslant x\leqslant 2,\\ 12x-16, & x>2.\end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式；

(2) $g(x)$ 是否有间断点、不可导点？若有，指出这些点。

3.3-004 1998 数二; 880 第一章基础解答 7

求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型。

3.3-005 2001 数二

求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型。

3.3-006 2003 数二

设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\dfrac{x}{4}}, & x>0.\end{cases}$$

问 a 为何值时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续？a 为何值时，$x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

3.3-007 2003 数三

(1) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$（　　）

A. 在 $x=0$ 处左极限不存在.
B. 有跳跃间断点 $x=0$.
C. 在 $x=0$ 处右极限不存在.
D. 有可去间断点 $x=0$.

3.3-008 2004 数三

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则（　　）

A. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点
B. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点
C. $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点
D. $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关

3.3-009 2005 数二

(12) 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（　　）。

A. $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点
B. $x=0,x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点
C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点
D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

3.3-010 2007 数二

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+\mathrm{e}\right)\tan x}{x\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right)}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$(　).

A. 0　　**B.** 1　　**C.** $-\dfrac{\pi}{2}$　　**D.** $\dfrac{\pi}{2}$

3.3-011 2008 数二

(4) 设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$，则 $f(x)$ 有 ( ).

A. 1 个可去间断点，1 个跳跃间断点　　**B.** 1 个可去间断点，1 个无穷间断点

C. 2 个跳跃间断点　　**D.** 2 个无穷间断点

3.3-012 2008 数三

（1）设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{x}$ 的（　　）

A. 跳跃间断点.　　**B.** 可去间断点.　　**C.** 无穷间断点.　　**D.** 振荡间断点.

3.3-013 2009 数二三

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$ 的可去间断点的个数为 ( )

A. 1.　　**B.** 2.　　**C.** 3.　　**D.** 无穷多个.

3.3-014 2010 数二

(1) 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$ 的无穷间断点的个数为 ( )

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

3.3-015 2013 数三; 26 版 1000 第一章基础 21

(2) 函数 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 ( )

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

3.3-016 2020 数二三

函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

3.3-017 26 版 1000 第一章基础 22

函数 $f(x)=\dfrac{\ln|1-x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x+2)}$ 的第二类间断点的个数为（　　）.

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

3.3-018 2024 数二

函数 $f(x)=|x|^{\frac{1}{(1-x)(x-2)}}$ 的第一类间断点的个数为（　　）

A. 3　　**B.** 2　　**C.** 1　　**D.** 0

3.3-019 880 第一章综合选择 7

【7】$f(x)=\dfrac{x\ln|x|}{|x-1|}\mathrm{e}^{\frac{1}{(x-1)(x-2)}}$ 的无穷间断点的个数为（　　）.

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

3.3-020 880 第一章综合选择 5

【5】设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则（　　）

A. $x=0$ 是 $F(x)$ 的连续点　　**B.** $x=0$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点

C. $x=0$ 是 $F(x)$ 的第二类间断点　　**D.** 以上说法均错误

3.3-021 880 第一章基础选择 12

【12】函数 $f(x)=\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}$ 在 $x=0$ 处为（　　）。

A. 可去间断点　　**B.** 跳跃间断点　　**C.** 无穷间断点　　**D.** 振荡间断点

3.3-022 900 数二第一章 A 类 20

函数 $f(x)=\dfrac{|x|^{2x}-1}{x(x+2)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为（　　）

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

3.3-023 900 数二第一章 A 类 21

下列关于函数 $f(x)=\dfrac{|x|^{|x|}-x}{|x|^{|x|}\ln|x|}$ 的说法中，正确的是 ()

A. $f(x)$ 只有可去间断点　　**B.** $f(x)$ 只有跳跃间断点

C. $f(x)$ 有可去间断点和无穷间断点，没有跳跃间断点　　**D.** $f(x)$ 有可去间断点、跳跃间断点和无穷间断点

3.3-024 900 数二第一章 A 类 22

函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x\sin x}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 ()

A. 连续　　**B.** 有可去间断点　　**C.** 有跳跃间断点　　**D.** 有无穷间断点

3.3-025 900 数二第一章 A 类 23

设函数 $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\frac{(x-2)(x-3)}{x-1}}-1}$，则（　　）

A. $x=1$，$x=2$，$x=3$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x=1$，$x=2$，$x=3$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=2$，$x=3$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

D. $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=2$，$x=3$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

3.3-026 900 数二第一章 A 类 24

设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\mathrm{e}^{nx}+1)\sin x}{1+x^3\mathrm{e}^{nx}}$，则下列结论中，正确的是（　　）

A. $f(x)$ 不存在间断点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点

D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点

3.3-027 900 数二第一章 A 类 25

函数 $f(x)=\dfrac{(x-1)\sin x\arctan\dfrac{1}{x-1}}{(x^4-1)(x-2)|x|}$ 的跳跃间断点的个数是（　　）

A. 1　　**B.** 2　　**C.** 3　　**D.** 4

3.3-028 900 数二第一章 B 类 19

函数 $f(x)=\dfrac{\left(a-\arctan\dfrac{1}{x}\right)(\mathrm{e}^x-b)}{x^2(x-b)}$ $(b\neq 0)$ 的可去间断点的个数最多为（　　）

A. 0　　**B.** 1　　**C.** 2　　**D.** 3

3.3-029 26 版 660 数二第 566 题

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，$x_0\in(a,b)$ 是 $f'(x)$ 的间断点，则该间断点一定是

注：若 $\lim\limits_{x\to x_0^{\pm}}g(x)$ 中有一个为 ∞，称 x_0 是 $g(x)$ 的无穷型间断点。

A. 可去间断点

B. 跳跃间断点

C. 无穷型间断点

D. 非无穷型第二类间断点

3.3-030 25 版 660 数一二三第 142 题

设 $f(x)=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{x-1}{x}}$，则

A. $x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第一类间断点.

B. $x=0$ 与 $x=1$ 都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

C. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

D. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

3.3-031 26 版 660 数二第 446 题

函数 $f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x^2-\pi x}e^{\frac{1}{x-1}}$ 有 n 个第二类间断点，则 $n=$_____.

3.3-032 26 版 660 数一二三第 20 题

设 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-b}{(x-a)(x-b)}$ 有无穷间断点 $x=\mathrm{e}$，可去间断点 $x=1$，则 $(a,b)=$_____。

3.3-033 25 版 660 数一二三第 141 题

以下函数 $f(g(x))$ 以 $x=0$ 为第二类间断点的是

A. $f(u)=\ln(1+u^2)$，
$g(x)=\begin{cases}\sin^2 x+(x+1)^2, & x\leqslant 0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$

B. $f(u)=\begin{cases}1-u, & u\leqslant 0\\ u^2+1, & u>0\end{cases}$，$g(x)=2\cos x-1$

C. $f(u)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-u^2)}{u}\sin\dfrac{1}{u}, & u<0\\ 1-\cos\sqrt{u}, & u\geqslant 0\end{cases}$，
$g(x)=\begin{cases}x, & x<0\\ x+\dfrac{\pi^2}{4}, & x\geqslant 0\end{cases}$

D. $f(u)=e^{u^2}+1$，$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x<0\\ 0, & x=0\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x>0\end{cases}$

3.3-034 26 版 660 数二第 520 题

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内都有定义，且 $x=x_1$ 是 $f(x)$ 的唯一间断点，$x=x_2$ 是 $g(x)$ 的唯一间断点。则

A. 当 $x_1=x_2$ 时，$f(x)+g(x)$ 必有唯一的间断点 $x=x_1$。
B. 当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x)+g(x)$ 必有两个间断点 $x=x_1$ 与 $x=x_2$。
C. 当 $x_1=x_2$ 时，$f(x)g(x)$ 必有唯一的间断点 $x=x_1$。
D. 当 $x_1\neq x_2$ 时，$f(x)g(x)$ 必有两个间断点 $x=x_1$ 与 $x=x_2$。

3.3-035 姜晓千强化例题

【例 1.22】设 $x=0$ 为 $f(x)=\dfrac{ax-\ln(1+x)}{x+b\sin x}$ 的可去间断点，则 a,b 的取值范围是

A. $a=1,b$ 为任意常数
B. $a\neq 1,b$ 为任意常数
C. $b=-1,a$ 为任意常数
D. $b\neq -1,a$ 为任意常数

3.3-036 26 版 1000 第一章强化 39

下面结论正确的是 ( ).

A. 设 $u=f(x)$ 在 x_0 处连续，而 $v=g(x)$ 在 x_0 处不连续，则函数 $y=f(x)g(x)$ 在 x_0 处一定不连续
B. 设 $u=f(x)$ 在 x_0 处连续，而 $v=g(x)$ 在 x_0 处不连续，则函数 $y=f(x)+g(x)$ 在 x_0 处一定不连续
C. 设 $u=f(x)$ 在 x_0 处连续，而 $v=g(u)$ 在 $u_0=f(x_0)$ 处不连续，则复合函数 $y=g[f(x)]$ 在 x_0 处一定不连续
D. 以上选项均不正确

3.3-037 25 版 660 数一二三第 143 题

设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，且 $f(x)$ 在 x_0 间断，则在点 x_0 处必定间断的函数是

A. $f(x)\sin x$　　**B.** $f(x)+\sin x$　　**C.** $f^2(x)$　　**D.** $|f(x)|$

3.3-038 26 版 1000 第一章强化 42

$f(x)=\dfrac{|\ln|x||}{x^2-1}$ 有（）.

A. 两个跳跃间断点，一个无穷间断点　　**B.** 两个可去间断点，一个无穷间断点

C. 一个可去间断点，一个跳跃间断点，一个无穷间断点　　**D.** 三个无穷间断点

3.3-039 26 版 1000 第六章基础 16

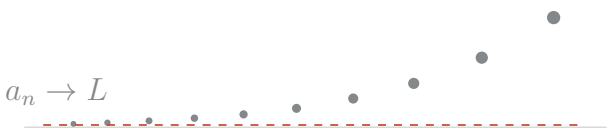
设常数 $k>0$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k}$ 在 $(0,+\infty)$ 内的间断点个数为（　　）.

A. 3　　**B.** 2　　**C.** 1　　**D.** 0

— END —

守得云开见月明

- 低头看路，抬头看天



PLDY-DAGUAN / CALC-01

2026.07 · @Kylaan 整理 /