$$\psi = \int e^{\frac{i}{\hbar}\int\left(\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{4}F^2 + \bar{\psi}i\not{D}\psi - \lambda\varphi\bar{\psi}\psi + |D\varphi|^2 - V(\varphi)\right)}$$

path integral Feynmann
imaginary unit
spacetime-relativity Einstein
strong/weak/e.m. interactions Maxwell Yang-Mills
φ - ψ interaction Yukawa
Schrödinger wave function
Euler exponential
Planck quantum
Newton gravitation
Dirac relativistic wave function
Kobayashi-Maskawa CKM matrix
Higgs Boson

多元微分大观



B 站：澄潇宇

多元微分 - 目录

A.概念题 3
1.基本概念题 3
2.已知具体多元函数判断其他 5
B.重极限 14
1.求重极限 14
2.已知重极限推导其他 17
a) 已知重极限求偏导 / 判断可微 / 求全微分 17
b) 已知重极限求多元复合函数极值 22
C.偏导数 25
1.多元函数求偏导 25
a) 一阶偏导 25
(1) 判断偏导存在 25
(2) 常规 26
(3) 考察换元思想 29
b) 二阶偏导 31
(1) 分段函数 31
(2) 常规 32
(3) 含变限积分 33
c) n 阶偏导 36
2.多元复合函数求偏导 37
a)$f(u)$ 37
(1) 常规一阶 37
(2) 常规二阶 40
b)$f(u,v)$ 42
(1) 常规一阶 42
(2) 常规二阶 44
(3)f套f 54
(4) 极坐标 56
3.利用变量代换化简偏微分方程 57
a) 线性变换 57
4.多元隐函数求偏导 62
a) 一个方程三个未知数 (常规) 62
(1) 一阶 62
(2) 二阶 71
b) 一个方程两个未知数 75
c) 两个方程三个未知数 76
d) 两个方程四个未知数 79
e) 两个方程五个未知数 80
f) 三个方程四个未知数 80
g) 三个方程五个未知数 80
5.求全微分 81

a) 具体 81
(1) 普通函数 81
(2) 隐函数 85
b) 抽象函数 90
6.已知偏导数相关求多元函数(偏积分) 91
a) 已知偏导数 91
b) 已知全微分 93
c) 已知关系式 96
D.多元微分应用 99
1.单调性 99
2.无条件极值 100
a) 概念题 100
b) 直接给出函数 102
c) 先求函数再求极值 114
(1) 已知偏导数 114
(2) 已知全微分 117
(3) 已知关系式 118
d)多元隐函数极值 119
e) 已知极值反求参数 122
3.条件极值 124
a) 直接给出 124
(1) 单约束 124
(2) 双约束 130
b) 需要处理条件 131
(1) 距离 131
(2) 面积 133
c) 数一专项 136
4.闭区域最值 139
a) 判断最值点位置 139
b) 闭区域 140
c) 确定多元函数不等式参数取值范围 145
d) 数一专项 147

A.概念题

1.基本概念题

a)1994 数一

(2) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 ( )

A. 充分条件而非必要条件.　　B. 必要条件而非充分条件.

C. 充分必要条件.　　D. 既非充分条件又非必要条件.

b)2002 数一;26 版 660 数一二三第 239 题

(1) 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质:

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续;　　② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续;

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微;　　④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用"$P\Rightarrow Q$"表示可由性质 P 推出性质 Q, 则有

A. ②⇒③⇒①.　　B. ③⇒②⇒①.　　C. ③⇒④⇒①.　　D. ③⇒①⇒④.

c)26 版 660 数一二三第 240 题

240 函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 (x_0,y_0) 处连续是函数 $f(x,y)$ 在该点处可微的

A. 充分但非必要条件　　B. 必要但非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

d)900 第四章数二 *A* 类 1

1 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处有定义, 则下列说法中, 正确的是 ( )

A. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0),\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 均存在, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 存在.

B. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0),\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 均存在, 则 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 均存在.

C. 若 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)$ 存在, 则 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 均存在.

D. 若 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 均存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0),\lim\limits_{y\to y_0}f(x_0,y)$ 均存在.

e)880 第四章基础选择 2

【2】设 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 均存在, 则下列选项正确的是 ( ).

A. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)$ 存在

B. $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

C. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y_0)$ 存在

D. $f(x,y)$ 在 $U(x_0,y_0)$ 内有定义

f)2007 数二

(7) 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是 ( ).

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

B. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $\lim\limits_{x\to0}[f_x'(x,0)-f_x'(0,0)]=0$, 且 $\lim\limits_{y\to0}[f_y'(0,y)-f_y'(0,0)]=0$

g)26版660数一二三第244题

244 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微的充分条件是

A. $\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x,0)=f_x'(0,0)$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}f_y'(0,y)=f_y'(0,0)$.

B. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$.

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}$ 和 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}$ 都存在.

D. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_x'(x,y)=f_x'(0,0)$ 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f_y'(x,y)=f_y'(0,0)$.

h)880第四章拓展选择

下列( )选项条件成立时, 能够推出函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 且全微分 $df(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=0$.

A. $f_x'(x_0,y_0)=f_y'(x_0,y_0)=0$

B. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta f=\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

C. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta f=\dfrac{\sin[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$

D. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量 $\Delta f=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$

2.已知具体多元函数判断其他

a)2020数二5.关于函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & xy\neq 0,\\ x, & y=0,\\ y, & x=0,\end{cases}$ 给出以下结论:

① $\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=1$; ② $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Big|_{(0,0)}=1$; ③ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$; ④ $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0}f(x,y)=0$.

其中正确的个数为( )

A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

b)26版660数一二三第242题

242 设 $f(x,y)=\begin{cases}xy, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0.\end{cases}$ 则下列命题成立的个数为

① $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处两个偏导数都存在.

② $\lim\limits_{x\to 0}f'_x(x,0)=f'_x(0,0)$, 且 $\lim\limits_{y\to 0}f'_y(0,y)=f'_y(0,0)$.

③ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处两个偏导数都连续.

④ $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

c)26版1000第十三章强化3

3.已知函数 $f(x,y)=x|x|+x|y|+y|x|+y|y|$, 则以下命题:

① $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=f(0,0)$; ② $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$; ③ $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=1$; ④ $df(0,0)=0$.

正确命题的个数为( ).

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

d)26版1000第十三章强化2

2.设 $f(x,y)=\begin{cases}\sin x\cos y, & x\neq 0,\\ 1-\cos y, & x=0,\end{cases}$ 则( ).

A. $f'_x(0,0)=0$ B. $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0}f(x,y)=0$ C. $f''_{yx}(0,0)=1$ D. $f'_y(0,0)=1$

e)900第四章数二B类2

2 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\cos xy, & xy\neq 0,\\ \cos y, & x=0,\\ \cos x, & y=0,\end{cases}$则下列结论中, 正确的是( )

A. 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续, 且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$存在.

B. 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续, 但$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$不存在.

C. 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续, 但$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$存在.

D. 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处不连续, 且$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$不存在.

f)2024数二

5.已知函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$, 则在点$(0,0)$处( ).

A. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续,$f(x,y)$可微　　B. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$连续,$f(x,y)$不可微

C. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续,$f(x,y)$可微　　D. $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$不连续,$f(x,y)$不可微

g)26版1000第十三章强化6

6.设$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$则$f(x,y)$在点$(0,0)$处( ).

A. 两个偏导数都存在,函数也连续　　B. 两个偏导数都存在,但函数不连续

C. 偏导数不存在,但函数连续　　D. 偏导数不存在,函数也不连续

h) 姜晓千真题同源150(重点)

【例 5.1】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 其中 $\alpha>0,\beta>0$.证明:

$(I)f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续 $\Leftrightarrow \alpha+\beta>2$.

$(II)f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微 $\Leftrightarrow \alpha+\beta>3$.

i) 姜晓千真题同源150(重点)

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ $z(t)=f\left(\mathrm{e}^{2t}-1,\arctan 3t\right)$, 则 $z'(0)=$_____.

j)1997 数一

(1) 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 (　)

A. 连续,偏导数存在.　　B. 连续,偏导数不存在.

C. 不连续,偏导数存在.　　D. 不连续,偏导数不存在.

k)900 第四章数二 *B* 类 4

4 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (　)

A. 不连续,偏导数也不存在.　　B. 偏导数存在,但不连续.

C. 连续且偏导数存在,但不可微.　　D. 可微.

1)26 版 660 数一二三第 226 题

226 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处

A. 连续.　　B. 不连续且 $f'_x(0,0)$ 不存在.

C. 不连续且 $f'_y(0,0)$ 不存在.　　D. 不可微.

m)26 版 660 数一二三第 241 题

241 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

A. 不连续.　　B. 连续但偏导数不存在.

C. 连续且偏导数存在但不可微.　　D. 可微.

n)26版660数一二三第243题

243 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

A. 连续, 但偏导数 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 不存在.

B. 连续且偏导数 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在, 但不可微.

C. 可微但 f_x' 和 f_y' 不连续.

D. 可微且 f_x' 和 f_y' 连续.

o)26版1000第十三章强化5

5.设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$ 回答以下问题, 并说明理由:

(1) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续?

(2) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的两个一阶偏导数是否存在？若存在, 求出这两个偏导数.

(3) 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 若可微, 求出函数的微分.

p)900第四章数二*A*类2

2 设 $f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}, & x\neq y,\\ 0, & x=y,\end{cases}$ $f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 (　)

A. $f_1(x,y),f_2(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处均连续.

B. $f_1(x,y),f_2(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处均不连续.

C. $f_1(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续,$f_2(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

D. $f_1(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续,$f_2(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续.

q)26版660数一二三第227题

227 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处

A. 两个偏导数都不存在.

B. 两个偏导数都存在但不可微.

C. 偏导数连续.

D. 可微但偏导数不连续.

r)26版660数一二三第87题

设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ a, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点连续, 则 $a=$_____.

s)880第四章综合选择3

【3】设 $f(x,y)=\begin{cases}y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (　)

A. 连续但不可微

B. 偏导数存在但不连续

C. 可微

D. 连续但偏导数不存在

t)880 第四章综合解答 17

【17】设 $f(x,y)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微? 偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在点 $(0,0)$ 处是否连续?

u)900 第四章数二 *B* 类 7

7 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(xy+a|x|+b\sqrt{|y|}\right)\arctan\dfrac{1}{|x|+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则下列说法中, 错误的是 ( )

A. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性与 a,b 的取值无关.

B. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数是否存在与 a,b 的取值无关.

C. 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性与 a,b 的取值有关.

D. 若函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

v)900 第四章数二 *B* 类 1

1 已知函数 $f(x,y)=g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 可微, 其中 $g(t)$ 为可导函数, 则 $g(t)$ 可能是以下四个函数中的 ( )

A. $2t$. B. e^t. C. $\cos t^2$. D. $\sin t$.

w)900 第四章数二 *B* 类 6

6 设函数 $g(x,y)=\begin{cases}0, & xy=0,\\ 1, & xy\neq 0.\end{cases}$ 若函数 $F(x,y)=f(x,y)g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则 $f(x,y)$ 可能为 ( )

A. $y+\cos xy$. B. $y+\sin xy$. C. $\sin y+xy$. D. x^2+y^2.

x)900 第四章数二 *B* 类 8

8 设函数 $f(x,y)=|x-y|^{\alpha}g(x,y)(\alpha>0)$, 其中 $g(x,y)$ 在原点的某邻域内连续, 则下列命题中, 错误的是 ( )

A. $f(x,y)$ 在原点处连续.

B. 若 $\alpha>1$, 则 $f_x'(0,0), f_y'(0,0)$ 存在.

C. 若 $\alpha>1$, 则 $f(x,y)$ 在原点处可微.

D. 若 $g(0,0)>0$, 则 $f(x,y)$ 在原点处取得极小值.

B.重极限

1.求重极限

a) 姜晓千基础例题

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}=$_____.

b) 北京市2015年竞赛题

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to -\frac{1}{3}}}(2+xy)^{\frac{1}{y+xy^2}}=$_____.

c)姜晓千强化例题

例1 求下列重极限:

(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^{\alpha}y^{\beta}}{x^2+y^2}\ (\alpha\geqslant 0,\beta\geqslant 0)$;　　(2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$;　　(3)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

d) 姜晓千真题同源 150

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{sin(xy)+xy^2cos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=_____.$$

e) 姜晓千真题同源 150

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y^2\sin x^4\tan^5 y}{x^6+y^8}=_____.$$

f)880 第四章基础填空 1

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=_____$$

g)880 第四章基础填空 2

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}=$_____.

h)880 第四章基础填空 3

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to 0}}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$_____

i) 姜晓千基础例题

【例 5.2】证明下列重极限不存在:

(1)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (2)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$; (3)$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{xy}{x+y}$.

2.已知重极限推导其他

a) 已知重极限求偏导 / 判断可微 / 求全微分

(1) 姜晓千真题同源 150(重点)

[例 5.3] 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y)-Ax-By-C}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$.证明:

$(I)f(x_0,y_0)=Ax_0+By_0+C$;

$(II)f_x'(x_0,y_0)=A, f_y'(x_0,y_0)=B$;

$(III)f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微, 且 $df\big|_{(x_0,y_0)}=A\ \mathrm{d}x+B\ \mathrm{d}y$;

(IV) (数学一要求) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切平面为 $z=Ax+By+C$.

(2)26 版 1000 第十三章强化 4

4.若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的某个邻域内有定义, $f(0,0)=0$, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}=a$, 其中 a 为常数.

(1) 讨论函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性;

(2) 当 a 为何值时, 函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微? 并求 $df\big|_{(0,0)}$.

(3)880第四章拓展解答

设$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义,$f(0,0)=0$,且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=1+k(k$为常数)

(I)证明:$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续;

(II)证明:当$k\neq -1$时,$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微;

(III)证明:当$k=-1$时,$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微.

(4)姜晓千真题同源150;26版660数一二三第95题(重点)

【补例】(1)(北京市2008年竞赛题)设$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续,且$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+3x-4y}{x^2+y^2}=2$,则

$2f'_x(0,0)+f'_y(0,0)=$_____;

(2)设$f(x,y)$在点$(1,1)$处连续,且$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\y\to 1}}\dfrac{f(x,y)+2x-3y+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}}=0$,则$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(1+t,1)-f(1,1-2t)}{t}=$_____.

(5)880第四章综合填空4

【4】设$f(x,y)$对任意的$(x,y)\in R^2$满足$f(x,y)=e^{x+y-2}+o(\rho)$,其中$\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$,

则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h,1)-f(1,1-2h)}{h}=$_____

(6)2012数三;26版660数一二三第99题

设连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则$\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$_____

(7)900第四章数二B类23

设连续函数$z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{f(x,y)+x-2y+3}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}=0$,则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$_____.

(8)900第四章数二C类1

设函数$f(x,y)$满足$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)+(x+1)^2(x-y)}{2x^2+y^2}=1$,则$df(x,y)\Big|_{(0,0)}=$_____.

(9)26版1000第十三章强化7

7.设函数$z=f(x,y)$连续,且$\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{f(x,y)-3x+y+5}{(x-1)^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$,则$\mathrm{d}z\Big|_{(1,0)}=$_____.

(10)26版660数一二三第100题

100 设$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续,且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-a-bx-cy}{\ln(1+x^2+y^2)}=1$,其中$a,b,c$为常数,则

$df(x,y)\Big|_{(0,0)}=$_____.

(11)2012 数一

(3) 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 那么下列命题正确的是 ( )

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

C. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

(12)900 第四章数二 B 类 5

5 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 则下列命题中, 正确的是 ( )

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^4+y^4}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

C. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}\right)^2}$ 存在.

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微, 则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^4+y^4}$ 存在.

***b*) 已知重极限求多元复合函数极值**

(1)2003 数一

(3) 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$, 则 ( )

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

D. 根据所给条件无法判别点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(2) 姜晓千真题同源 150(重点)

[例 5.10] 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$.若 $g(x,y)=f(1+xy,\,x^2+y^2)$, 证明:$g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极值, 并判断是极大值还是极小值.

(3)900 第四章数二 *B* 类 12

12 设函数 $f(x,y)$ 连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{x^4+y^3-2x^2-y^2}=1$, 则 ( )

A. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

D. 不能确定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(4)900 第四章数二 B 类 13

13 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$, 则 (　)

A. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

C. 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

D. 根据已知条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

(5)880 第四章综合选择 1

【1】设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}-1}=1$, 则 (　)

A. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值　　B. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极大值

C. $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不取得极值　　D. 不能确定 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极值

(6)880 第四章综合选择 2

【2】设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内连续, 且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{|x|+y^4}=-1$, 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (　).

A. 取得极小值　　B. 取得极大值

C. 不取得极值　　D. 无法确定是否取得极值

(7)900第四章数二B类14

14 设函数$f(x,y)$在点$(1,1)$处连续, 且满足$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{f(x,y)}{x^3+y^3-\frac{9}{2}(x^2+y^2)+6(x+y)-5}=1$,则( )

A. 点$(1,1)$是$f(x,y)$的极大值点.

B. 点$(1,1)$是$f(x,y)$的极小值点.

C. 点$(1,1)$不是$f(x,y)$的极值点.

D. 无法确定点$(1,1)$是否为$f(x,y)$的极值点.

(8)900第四章数二B类15

15 设函数$f(x,y)$连续,$z=\varphi(x,y)$的全微分为$\mathrm{d}z=(2x-y^2-2y)\mathrm{d}x+(-2xy-2x+y^3+3y)\mathrm{d}y$,且$\varphi(0,0)=0$.若$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{\varphi(x,y)}=1$, 则( )

A. 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点.

B. 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点.

C. 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点.

D. 不能确定点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点.

(9)900第四章数二A类5

5 设函数$f(x,y)$满足$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{[\sin(|x|+|y|)]^{\alpha}}=1,\alpha>0$且$f(0,0)=0$, 则下列结论中,错误的是( )

A. $f(x,y)$在点$(0,0)$处连续.

B. $f(x,y)$在点$(0,0)$处取得极小值.

C. 若$\alpha=1$, 则$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都不存在.

D. 若$\alpha>1$, 则$f_x'(0,0)$和$f_y'(0,0)$都存在且均不为0.

C.偏导数

1.多元函数求偏导

a) 一阶偏导

(1) 判断偏导存在

i)2008 数三

(3) 已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则 ( )

A. $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都存在

B. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在

C. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 不存在

D. $f'_x(0,0), f'_y(0,0)$ 都不存在

ii)2023 数三

1.已知函数 $f(x,y)=\ln(y+|x\sin y|)$, 则 ( ).

A. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在

B. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 存在, $\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0.1)}$ 不存在

C. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0.1)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0.1)}$ 均存在

D. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0.1)}$ 均不存在

iii)26 版 1000 第十三章强化 1

1.设函数 $f(x,y)=|x|+y|y|$, 则 ( ).

A. $f'_x(0,0)$ 存在, $f'_y(0,0)$ 存在

B. $f'_x(0,0)$ 存在, $f'_y(0,0)$ 不存在

C. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 存在

D. $f'_x(0,0)$ 不存在, $f'_y(0,0)$ 不存在

iv)880 第四章基础选择 1

【1】设 $f(x,y)=\arcsin\sqrt{x^2+y^4}$, 则下列选项正确的是 ( ).

A. $f_x'(0,0)$ 存在, $f_y'(0,0)$ 存在

B. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 存在

C. $f_x'(0,0)$ 不存在, $f_y'(0,0)$ 不存在

D. $f_x'(0,0)$ 存在, $f_y'(0,0)$ 不存在

v)900 第四章数二 *A* 类 3

3 已知函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{|\sin x|}-\cos y$, 则 ( )

A. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 不存在, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 存在.

B. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}$ 存在, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 不存在.

C. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 均存在.

D. $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}, \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ 均不存在.

vi)900 第四章数二 *A* 类 4

4 设函数 $f_1(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ $f_2(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$

则 ( )

A. 在点 $(0,0)$ 处, $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 的偏导数均存在.

B. 在点 $(0,0)$ 处, $f_1(x,y)$ 的偏导数不存在, $f_2(x,y)$ 的偏导数存在.

C. 在点 $(0,0)$ 处, $f_1(x,y)$ 的偏导数存在, $f_2(x,y)$ 的偏导数不存在.

D. 在点 $(0,0)$ 处, $f_1(x,y)$ 和 $f_2(x,y)$ 的偏导数均不存在.

(2) 常规

i)2008数二

设$z=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$_____

ii)2009数三

设$z=(x+\mathrm{e}^{y})^{x}$, 则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$_____

iii)26版660数一二三第96题

设$z=\left(y^{x}+\frac{\sin x}{\sqrt{x^{2}+2y^{2}}}\right)^{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$, 则$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$_____.

iv)26版660数一二三第89题

设$f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\mathrm{e}^{xy}+xy\sqrt{x^2+y^2}}$，则$f_x'(1,0)=$_____.

v)2016数二三;880第四章基础选择9

(2) 已知函数$f(x,y)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-y}$，则（ ）

A. $f_x'-f_y'=0$.　　B. $f_x'+f_y'=0$.　　C. $f_x'-f_y'=f$.　　D. $f_x'+f_y'=f$.

vi)26版1000第十三章基础9;880第四章基础选择4(重点)

9.设函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$，求$\dfrac{\partial[f(x,y)]}{\partial x}$.

vii)26版660数一二三第88题

设$z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$, 则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(3) 考察换元思想

i)2004数三

(2) 设函数$f(u,v)$由关系式$f[xg(y),y]=x+y$确定, 其中函数$g(y)$可微, 且$g(y)\neq 0$, 则$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$_____.

ii)2015数二

(5) 设函数$f(u,v)$满足$f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$, 则$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$与$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}$依次是( )

A. $\frac{1}{2},0.$　　B. $0,\frac{1}{2}.$　　C. $-\frac{1}{2},0.$　　D. $0,-\frac{1}{2}.$

iii)26版1000第十三章基础8

8.设$f\left(x+y,\frac{x}{y}\right)=x^2-xy+y^2$, 则$f_x'(x,y)=$_____.

iv)900第四章数二*A*类8

8 设函数$f(u,v)$满足$f\left(2x+y,\frac{2y}{x}\right)=4x^2-y^2$, 则$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=0}},\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=0}}$依次是( )

A. $\frac{1}{2},2.$　　B. $2,\frac{1}{2}.$　　C. $-\frac{1}{2},2.$　　D. $2,-\frac{1}{2}.$

v)26版660数一二三第225题

225 已知$f\left(\frac{1}{y},\frac{1}{x}\right)=\frac{xy-x^2}{x-2y}$, 则$f(x,y)=$

A. $\frac{x-y}{xy-2x^2}.$　　B. $\frac{x-y}{xy-2y^2}.$　　C. $\frac{y-x}{xy-2x^2}.$　　D. $\frac{y-x}{xy-2y^2}.$

vi)900 第四章数二 *A* 类 1515 设函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x+y,x-y)=\sin x\cos x+\sin y\cos y$, 则 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{(0,0)}+\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(0,0)}=$( )

A. 0. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.

vii)26 版 660 数一二三第 230 题

230 已知函数 $f(x+y,x-y)=x^2-y^2$ 对任何 x 与 y 成立, 则 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 等于

A. $2x-2y$. B. $2x+2y$. C. $x+y$. D. $x-y$.

b) 二阶偏导

(1) 分段函数

i)880 第四章基础选择 3

【3】设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^4}\sin(xy^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则正确的是( ).

A. $f''_{xy}(0,0)$ 存在, $f''_{yx}(0,0)$ 存在 B. $f''_{xy}(0,0)$ 不存在, $f''_{yx}(0,0)$ 存在

C. $f''_{xy}(0,0)$ 存在, $f''_{yx}(0,0)$ 不存在 D. $f''_{xy}(0,0)$ 不存在, $f'''_{yx}(0,0)$ 不存在

ii)900 第四章数二 *B* 类 3

3 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则下列命题中, 正确的是 ( )

A. $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$ 均不存在.

B. $f''_{xy}(0,0)$ 不存在, 但 $f''_{yx}(0,0)$ 存在.

C. $f''_{xy}(0,0)$ 存在, 但 $f''_{yx}(0,0)$ 不存在.

D. $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$ 均存在.

iii)26 版 660 数一二三第 248 题

248 已知 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$ 则

A. $f''_{xy}(0,0)=1.$

B. $f''_{xy}(0,0)=0.$

C. $f''_{yx}(0,0)=1.$

D. $f''_{yx}(0,0)=-1.$

(2) 常规

i)1994 数三

已知 $f(x,y)=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$, 求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.$

ii)1994 数一

设 $u=\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\frac{1}{\pi}\right)$ 处的值为 _____

iii)26 版 660 数一二三第 90 题

设 $f(x,y)=\ln|x+y|-\sin(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ 在点 $(1,\pi)$ 处的值为 _____.

(3) 含变限积分

i)2011 数一;880 第四章基础填空 12

设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$, 则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ _____

ii)900 第四章数二 *A* 类 18

设函数 $F(x,y)=\int_0^{x+y}\frac{\cos t}{1+t}dt$, 则 $\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=-1\\y=1}}=$_____.

iii)2020 数一;26 版 1000 第十三章强化 10

设函数 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{xt^2}dt$, 则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$_____

iv)900 第四章数二 *B* 类 19

设函数 $f(x,y)=\int_0^{x^2y}ye^{yt}dt$, 则 $\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right|_{(1,1)}=$_____.

v)2005数一二

(9) 设函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中函数$\varphi$具有二阶导数, ψ具有一阶导数, 则必有

A. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　C. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.　　D. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

vi)2022数二三

(4) 已知$f(t)$连续, 令$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)dt$, 则( )

A. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　B. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

C. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.　　D. $\frac{\partial F}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

vii)26版1000第十三章基础5

5.设$F(x,y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)e^t dt$, 则$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=$_____.

viii)900 第四章数二 *A* 类 10

10 设函数 $u(x,y)=f(xy)+\int_0^{x+y}f(x+y-t)dt, v(x,y)=yf(x+y)+\int_{y-x}^{y}f(x+t)dt$, 其中函数 $f(t)$ 具有一阶导数, 则下列结论中, 正确的是 ( )

A. 若 $x=y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}$.

B. 若 $x=y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}$.

C. 若 $x\neq y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial u}{\partial y}$.

D. 若 $x\neq y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial x}$.

ix) 姜晓千真题同源 150;25 版 660 数一二三第 94 题 (重点)

设 $z=\int_0^1 f(t)|xy-t|dt, x,y\in[0,1]$, 其中 $f(t)$ 连续, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$_____.

c) n 阶偏导

(1) 江苏省 2008 年竞赛题 (重点)； 880 第四章综合填空 3

设 $z=\frac{2x}{x^2-y^2}$, 则 $\left.\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right|_{(2,1)}=$_____.

2.多元复合函数求偏导

a)$f(u)$

(1) 常规一阶

i)2012 数二

设$z=f\left(\ln x+\frac{1}{y}\right)$, 其中函数$f(u)$可微, 则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=$_____

ii)2013 数二

(5) 设$z=\frac{y}{x}f(xy)$, 其中函数f可微, 则$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$( )

A. $2yf'(xy)$.　　B. $-2yf'(xy)$.　　C. $\frac{2}{x}f(xy)$.　　D. $-\frac{2}{x}f(xy)$.

iii)1995 数三

设$z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$,$f(u)$可导, 则$xz'_x+yz'_y=$_____.

iv)2019数二

11.设函数$f(u)$可导,$z=yf\left(\frac{y^2}{x}\right)$,则$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____

v)26版1000第十三章基础3

3.设函数$f(u)$可导,$z=yf\left(x^{y^2}\right)$,则$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

vi)2019数一

设函数$f(u)$可导,$z=f(\sin y-\sin x)+xy$,则$\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$_____

vii)26版1000第十三章基础2

2.设函数$f(u)$可导,$z=f(\cos y-\cos x)+xy$,则$\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\sin y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

viii)2022数一;26版1000第十三章基础14

(2)设$f(u)$可导,$z=xyf\left(\frac{y}{x}\right)$,若$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=y^2(\ln y-\ln x)$,则( )

A. $f(1)=\frac{1}{2},f'(1)=0.$　　B. $f(1)=0,f'(1)=-\frac{1}{2}.$

C. $f(1)=\frac{1}{2},f'(1)=1.$　　D. $f(1)=0,f'(1)=1.$

ix)26版660数一二三第229题

229设函数$z=\sqrt{x^2+y^2}f\left(\frac{y}{x}\right)$,且$f(u)$可导,若$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$,则

A. $f(1)=1,f'(1)=0.$　　B. $f(1)=0,f'(1)=1.$

C. $f(1)=0,f'(1)=0.$　　D. $f(1)=1,f'(1)=1.$

x)900 第四章数二 B 类 10

10 已知函数 $f(u)$ 可导, 二元函数 $z(x,y)=f(xy)f\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足 $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xye^{xy+\frac{y}{x}}$, 则下列关于函数 $f(u)$ 的说法中, 正确的是 ( )

A. 曲线 $y=f(u)$ 是凸曲线.　　B. 曲线 $y=f(u)$ 是凹曲线.

C. 曲线 $y=f(u)$ 存在拐点.　　D. 曲线 $y=f(u)$ 存在渐近线.

xi) 姜晓千真题同源 150;25 版 660 数一二三第 95 题 (重点)

95 设 $f(x),g(x)$ 可微, $u(x,y)=f(2x+5y)+g(2x-5y)$, 且满足 $u(x,0)=\sin 2x, u'_y(x,0)=0$, 则 $f(x)=$ _____.

(2) 常规二阶

i)1988 数一

设 $u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f,g 具有二阶连续导数, 求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

ii)1998 数一

设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y),f,\varphi$ 具有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____

iii)2005 数三

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数, 且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$, 求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

iv)26 版 660 数一二三第 233 题

23 设 $z=xf(x-y)+yg(x+y)$, 其中 f 与 g 有二阶连续导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 等于

A. $2(f'-g')$.　　B. $f'-g'$.　　C. $f'+g'$.　　D. $xf''+yg''$.

***b*)$f(u,v)$**

(1) 常规一阶

i)1987 数一

设f,g为连续可微函数,$u=f(x,xy),v=g(x+xy)$, 求$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$.

ii)2000 数三

设$z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中$f,g$均可微, 则$\frac{\partial z}{\partial x}=$_____

iii)2007 数一

设$f(u,v)$为二元可微函数,$z=f(x^y,y^x)$, 则$\frac{\partial z}{\partial x}=$_____

iv)2007 数二三

设 $f(u,v)$ 是二元可微函数，$z=f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

v)900 第四章数二 *A* 类 21

21 已知函数 $f(u,v)$ 可微，$z(x,y)=f(x+y,y-x)-f(xy,2-x)$，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,2)}-\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,2)}=$_____.

vi)26 版 1000 第十三章强化 16

16.设函数 f 与 g 均可微，$z=f[xy,\ln x+g(xy)]$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$（ ）.

A. f_1'　　B. f_2'　　C. $f_1'+f_2'$　　D. $f_1'-f_2'$

vii)26版1000第十三章强化8

8.设函数$f(u,v)$具有连续偏导数,$z=f(xy,x+y)$.若$\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=2\\y=3}}=6\mathrm{d}x+5\mathrm{d}y$,则$f'_u(6,5)+f'_v(6,5)=$_____

(2)常规二阶

i)1989数一

设$z=f(2x-y)+g(x,xy)$,其中函数$f(t)$二阶可导,$g(u,v)$具有连续二阶偏导数,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

ii)1989数三

已知$z=f(u,v),u=x+y,v=xy$,且$f(u,v)$的二阶偏导数都连续.求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

iii)1990 数一

设 $z=f(2x-y,y\sin x)$, 其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

iv)1992 数一

设 $z=f\left(\mathrm{e}^x\sin y,x^2+y^2\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

v)1992 数三

设 $z=\sin(xy)+\varphi\left(x,\dfrac{x}{y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, 其中 $\varphi(u,v)$ 有二阶偏导数.

vi)2000 数一;880 第四章基础填空 15

设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

vii)2004 数二

设 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$, 其中 f 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$

viii)2009 数一

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____

ix)2009 数二

设$z=f(x+y,x-y,xy)$, 其中f具有二阶连续偏导数, 求 dz 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

x)2011 数一二

设函数$z=f(xy,yg(x))$, 其中函数f具有二阶连续偏导数, 函数$g(x)$ 可导, 且在$x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$.求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

xi)2003 数三

设$f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又 $g(x,y)=f\left[xy,\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)\right]$, 求 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

xii)2019数三

设函数$f(u,v)$具有2阶连续偏导数, 函数$g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$.求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$

xiii)2017数一二;880第四章基础填空10

设函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数, $y=f(e^x,\cos x)$, 求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

xiv)2024数一

设函数$f(u,v)$具有2阶连续偏导数, 且$\left.df\right|_{(1,1)}=3du+4dv$.令$y=f(\cos x, 1+x^2)$, 则$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$_____.

xv)2024 数二已知函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数, 且函数 $g(x,y)=f(2x+y,3x-y)$ 满足 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}-6\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1$.

(I) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$;

(II) 若 $\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=ue^{-u}, f(0,v)=\frac{1}{50}v^2-1$, 求 $f(u,v)$ 的表达式.

xvi)880 第四章综合解答 22

【22】设 $w=xy-z, z=z(x,y)$ 有二阶连续的偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, 作变换 $u=x+y, v=x-y$.

(I) 求 $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$;

(II) 若 $\frac{\partial w(0,v)}{\partial u}=ve^{-v}, w(0,v)=\frac{v^2}{4}$, 求 $z(x,y)$ 的表达式.

xvii)1998年江苏省高等数学竞赛题(重点)

(2)(江苏省高等数学竞赛题,1998年)设$f(x,y)$有二阶连续偏导数,满足$f''_{xx}(x,y)=f''_{yy}(x,y),f(x,2x)=x^2,f'_x(x,2x)=x$,则$f''_{xx}(x,2x)=$_____,$f''_{xy}(x,2x)=$_____.

xviii)900第四章数二*B*类27

27设有二阶连续偏导数的函数$u=u(s,t)$满足$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$以及$u(x,2x)=x^2,u'_1(x,2x)=4x$.求$u''_{11}(x,2x)$和$u''_{12}(x,2x)$.

xix)900 第四章数二 *A* 类 32

32 设函数 $z=f(x\cos y, yg(x))$, 其中函数 f 具有二阶连续偏导数, 且 $f_{12}''(1,0)=1$, 函数 $g(x)$ 可导, 且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=2$.求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=0}}$.

xx)26 版 660 数一二三第 91 题

设 $z=\mathrm{e}^{xy}+f(x+y,xy)$, $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数, 则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____.

xxi)25 版 660 数一二三第 93 题

93 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $4\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$, 又 $g(x,y)=f(x^2+y^2,xy)$, 则 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}=$_____.

xxii)880 第四章基础填空 9

设 $z=f\left(\frac{y}{x}\right)+g(\mathrm{e}^{x},\sin y)$, f 有二阶连续导数, g 有二阶连续偏导数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____

xxiii)900 第四章数二 *A* 类 34

设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x,y)=x^2+y^2-f(x+y,xy)$.求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

xxiv)26 版 1000 第十三章基础 13

13.设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x,y)=xy-f\left(\frac{y}{x},\frac{x}{y}\right)$, 求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

xxv)26版1000第十三章基础15

15.设$f(u)=\ln u, u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 求$\frac{\partial^2[f(u)]}{\partial x^2}+\frac{\partial^2[f(u)]}{\partial y^2}+\frac{\partial^2[f(u)]}{\partial z^2}$

xxvi)26版1000第十三章基础12

12.设f具有二阶连续偏导数, 且$u=f(x^2+y, xy)$, 则$u''_{xy}=$_____.

xxvii)900第四章数二*A*类9

9若二元函数$f(x,y)$存在二阶连续偏导数, 且满足$f(x,y)=-f(y,x)$, 则下列结论中, 错误的是( )

A. $f''_{11}(x,y)=f''_{22}(x,y)$.

B. $f''_{11}(x,y)=-f''_{22}(y,x)$.

C. $f''_{12}(x,y)=f''_{21}(x,y)$.

D. $f''_{12}(x,y)=-f''_{21}(y,x)$.

(3)f套f

i)2001 数一

设函数$z=f(x,y)$在点$(1,1)$处可微, 且$f(1,1)=1, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3, \varphi(x)=f[x,f(x,x)]$.求$\left.\frac{d}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

ii)2011 数三

已知函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数, $f(1,1)=2$是$f(u,v)$的极值, $z=f(x+y,f(x,y))$.求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

iii)25 版 660 数一二三第 92 题

92 已知函数$z=f(x,y)$在点$(1,2)$处可微, 且$f(1,2)=1, f'_x(1,2)=2, f'_y(1,2)=3$,设函数$\varphi(x)=f(x,2f(x,2x))$, 则$\varphi'(1)=$_____.

iv)880 第四章基础填空 5

设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(1,2)=2, f_x'(1,2)=3, f_y'(1,2)=4, F(x)=f[x,f(x,2x)]$, 则 $F'(1)=$ _____.

v)900 第四章数二 *A* 类 19

19 已知函数 $f(u,v)$ 可微, 且 $f(0,1)=0, f_1'(0,1)=1, f_2'(0,1)=2$.令 $y(x)=f(f(x,\mathrm{e}^x),\mathrm{e}^x)$, 则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ _____.

vi)900 第四章数二 *A* 类 20

20 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且 $f(0,0)=0, f_1'(0,0)=a, f_2'(0,0)=b$.令 $\varphi(t)=f(\sin t, f(\tan t, 1-\cos t))$, 则 $\varphi'(0)=$ _____.

vii)900 第四章数二 *A* 类 33

33 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(0,1)=1$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f(2x+y,f(x,y))$.求 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,1)}$.

viii)26 版 1000 第十三章强化 43

43.已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$f(1,1)=1$ 是 $f(x,y)$ 的极值，且 $z=f[xy,f(x,y)]$，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$（ ）.

A. $f''_{uu}(1,1)+f''_{vv}(1,1)$　　B. $2f''_{uv}(1,1)$

C. 0　　D. $f''_{uu}(1,1)$

(4) 极坐标

i)900 第四章数二 *B* 类 20

20 设函数 $f(x,y)$ 可微，满足 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=1$，$z(r,\theta)$ 为 $f(x,y)$ 在极坐标系下的表示，则对单位圆周上的任一点 $(1,\theta)$，$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2=$_____.

ii)900 第四章数二 *B* 类 21

设可微函数 $z=f(x,y)$ 在极坐标变换下满足 $\dfrac{\partial z}{\partial r}=r$, 则 $f_x'(1,0)+f_y'(0,1)=$_____.

3.利用变量代换化简偏微分方程

a) 线性变换

(1)1996 数一

(2) 设变换 $\begin{cases}u=x-2y,\\ v=x+ay\end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 简化为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$, 求常数 a. (这里应假设 z 有二阶连续偏导数)

(2)2010数二

设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且满足等式$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+12\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.确定$a,b$的值，使等式在变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$下简化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(3)900第四章数二B类9

9 设函数$z(x,y)$具有二阶连续偏导数，则下列各项中的变换能将方程$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$化简为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$的是（ ）

A. $\begin{cases}u=x+y,\\ v=-\frac{2}{3}x+y.\end{cases}$　B. $\begin{cases}u=x-\frac{2}{3}y,\\ v=x+y.\end{cases}$　C. $\begin{cases}u=x-\frac{2}{3}y,\\ v=\frac{3}{2}x+y.\end{cases}$　D. $\begin{cases}u=x+\frac{2}{3}y,\\ v=-\frac{3}{2}x+y.\end{cases}$

(4)26版1000第十三章强化45

45.设$z=z(x,y)$二阶偏导数连续，且$\begin{cases}u=x+ay,\\v=x+by\end{cases}(a<b)$可将方程$3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$化简为$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0, z(x,0)=\sin x, z'_y(x,0)=0.$

(1)求a,b的值；

(2)求$z(x,y)$的表达式.

(5)26版1000第十三章基础16

16.设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数，作变量代换$\xi=x,\eta=y-x$，将方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$化为以$\xi,\eta$为自变量的方程.

(6)900第四章数二A类38

38 设函数$u=f(x,y)$具有二阶连续偏导数, 且满足等式$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.确定$a,b$的值, 使等式在变换$\xi=x+ay,\eta=bx+2y(ab\neq 2)$下简化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$.

(7)880第四章基础解答10

【10】设$u(x,y)$有二阶连续偏导数, 利用变换$\xi=x+ay,\eta=x+by$, 将方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$化为$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$, 求$a,b$的值. b) 非线性变换

(1)2019 数二

已知函数 $u(x,y)$ 满足 $2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}+3\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, 求 a,b 的值使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 之下, 上述等式可化为函数 $v(x,y)$ 的不含一阶偏导数的等式.

(2)900 第四章数二 A 类 37

37 已知函数 $u(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+3\dfrac{\partial u}{\partial x}-4\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$, 求 a,b 的值, 使得在变换 $u(x,y)=v(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ 下, 上述等式可化为不含 $v(x,y)$ 的一阶偏导数的等式.

4.多元隐函数求偏导

a) 一个方程三个未知数 (常规)

(1) 一阶

i) 具体

(*a*)2004 数二

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定, 则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$_____

(*b*)2013 数三

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$_____

(*c*)2018 数二

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln z+\mathrm{e}^{z-1}=xy$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\left(2,\frac{1}{2}\right)}=$_____

(*d*)2021 数二

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+y\ln z-\arctan(2xy)=1$ 确定, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0.2)}=$_____

(e)2025 数二

1.设函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}dt=0$ 确定, 则 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=$

A. $\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2}\right)$　　B. $\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-y^2}\right)$

C. $-\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-y^2}\right)$　　D. $-\frac{z}{z+1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}+\mathrm{e}^{-y^2}\right)$

(*f*)900 第四章数二 *A* 类 22

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $\ln(z+1)+\mathrm{e}^z=y\cos x+2x$ 确定, 则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=$_____.

(*g*)26版660数一二三第231题

231 设隐函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 确定, f 可微, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 等于

A. 1. B. x. C. y. D. z.

(*h*)25版660数一二三第103题

103 设 $f(x)$ 为连续函数, 且 $x^2+y^2+z^2=\int_x^y f(x+y-t)dt$ 确定二元函数 $z=z(x,y)$, 则 $z\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=$ _____.

(i)26版1000第十三章基础4

4.设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z+2y\ln z-\arctan(xy)=1$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,2)}=$ _____.

(j)900 第四章数二 A 类 23

23 设函数 $f(x,y,z)=e^{z}yz^{2}$, 若 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x+y+z+xyz=0$ 所确定的隐函数, 记 $g(x,y)=f(x,y,z(x,y))$, 则 $g'_{y}(0,1)=$_____.

***ii*) 抽象**

(a)1996 数三

设函数 $z=f(u)$, 方程 $u=\varphi(u)+\int_{y}^{x}p(t)dt$ 确定 u 是 x,y 的函数, 其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微;$p(t),\varphi'(u)$ 连续, 且 $\varphi'(u)\neq 1$.求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

(b)2010 数一二

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定, 其中 F 为可微函数, 且 $F'_{2}\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$( )

A. x.　　B. z　　C. $-x$.　　D. $-z$

(*c*)880 第四章基础填空 8

设 $y=f(x,t),t=t(x,y)$ 由方程 $G(x,y,t)=0$ 确定, f,G 可微, 则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$_____

(*d*)880 第四章综合解答 3 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{1}{z}$ 确定的隐函数, 其中 F 可微, 求 $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}$

(e)880 第四章综合解答 4

设 $y=g(x,z)$ 与 $z=z(x,y)$ 是由方程 $f(x-z,xy)=0$ 确定的函数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(f)26版1000第十三章基础17

17.设函数$z=z(x,y)$由方程$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$确定，且$F(u,v)$具有连续偏导数，求$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$.

(g)26版660数一二三第97题

97 设函数$F(u,v)$可微，且$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$确定隐函数$z=z(x,y)$，则$z-x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

(h)26版1000第十三章强化17

17.设$F(u,v)$具有一阶连续偏导数，且$z=z(x,y)$由方程$F\left(\frac{x}{z},yz\right)=0$所确定.设题中出现的分母不为零，则$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$( ).

A. 0　　B. z　　C. $\frac{1}{z}$　　D. 1

(i)900 第四章数二 A 类 12

12 已知二元函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $f\left(\frac{ye^x}{z},\ln z\right)=1$ 确定, 其中 f 存在一阶偏导数, 则下列结论中,正确的是 ( )

A. $\frac{\partial z}{\partial x}=x\frac{\partial z}{\partial y}$. B. $\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$. C. $x\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$. D. $y\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

(j)900 第四章数二 A 类 11

11 若由方程 $F(x,y,z)=0$ 可确定有连续偏导数的三个函数 $x=f(y,z),y=g(z,x),z=h(x,y)$, 则下列结论中, 正确的是 ( )

A. $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial F}{\partial z}$. B. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{\partial y}{\partial z}$. C. $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=1$. D. $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1$.

(k)26 版 660 数一二三第 247 题

247 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$.若已知 $F(x,y,z)$ 可微, 且 $F_x'(1,1,1)=-2,F_y'(1,1,1)=2,z(1,1)=1$ 和 $z_y'(1,1)=3$, 则 $z_x'(1,1)$ 等于

A. -3. B. -4. C. 3. D. 4.

(*l*)2008 数三

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数, 其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq -1$ 时.

(1) 求 $\mathrm{d}z$； (2) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

(*m*)900 第四章数二 *B* 类 25

25 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2xy-z=\varphi(x+2y+3z)$ 所确定的函数, 其中 $\varphi(t)$ 具有二阶导数, 且 $\varphi'(t)\neq -\dfrac{1}{3}$.

(*I*) 求 $\mathrm{d}z$;

(*II*) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-2y}\left(2\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

(*a*)2005 数一;880 第四章基础选择 5

(10) 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程 ( )

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

(*b*)900 第四章数二 *A* 类 14

14 设有三元方程 $x\arctan x+\dfrac{\ln x}{\ln y}+ze^{\sin z}=\dfrac{\pi}{4}$, 根据隐函数存在定理, 存在点 $(1,\mathrm{e},0)$ 的一个邻域, 在此邻域内该方程 ( )

A. 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

B. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

C. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

D. 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

(*c*)26 版 1000 第十三章强化 47

47.设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 的某邻域内一阶偏导数连续, $f(0,1)=0, f_y'(0,1)=1$, 则 $f\left(x,\int_1^t \ln x\ \mathrm{d}x\right)=0$( ).

A. 在点 $(0,1)$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-f_x'(0,1)$

B. 在点 $(0,1)$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-1$

C. 在点 $(0,\mathrm{e})$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-f_x'(0,1)$

D. 在点 $(0,\mathrm{e})$ 附近可确定 $t=t(x)$, 且 $t'(0)=-1$

(2) 二阶

i) 具体

(a)1988 数三

已知 $u+\mathrm{e}^{u}=xy$, 求 $\dfrac{\partial^{2}u}{\partial x\partial y}$.

(b)2023 数二

13.设函数 $z=z(x,y)$ 由 $\mathrm{e}^{z}+xz=2x-y$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}\right|_{(1,1)}=$_____

(c)2024 数三

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z+\mathrm{e}^{x}-y\ln(1+z^{2})=0$ 确定, 求 $\left.\left(\dfrac{\partial^{2}z}{\partial x^{2}}+\dfrac{\partial^{2}z}{\partial y^{2}}\right)\right|_{(0,0)}$.

(d)26版1000第十三章强化11

11.设$z=z(x,y)$是由$z+e^z=xy$所确定的二元函数，则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{z=0}=$_____.

(e)900第四章数二A类26

已知函数$z=z(x,y)$由方程$e^z+xz-y\ln x=1$所确定，则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$_____.

(f)26版1000第十三章强化18

18.设$z=z(x,y)$是由方程$3x+xyz+z^3=1$所确定的函数，则$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{z=0\\y=0}}=$_____.

(*g*)900 第四章数二 *A* 类 13

13 设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z=0(z>0)$ 确定, 则当 $x=2,y=4$ 时, ( )

A. $z'_x=1$.　　B. $z'_y=2$.　　C. $z''_{xx}=-2$.　　D. $z''_{yy}=5$.

(*h*)26 版 660 数一二三第 234 题

234 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $3xy+2x-4y-z=\mathrm{e}^z$ 确定的隐函数, 且 $z(1,1)=0$, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=$

A. $4\dfrac{1}{2}$.　　B. $2\dfrac{1}{8}$.　　C. $4\dfrac{1}{4}$.　　D. $8\dfrac{1}{4}$.

(i)2025 数三

已知函数 $z=z(x,y)$ 由 $z+\ln z-\int_y^x x\mathrm{e}^{-t^2}dt=1$ 确定, 则 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(1,1)}=$ _____.

(j)26版1000第十三章强化15

15.设$z=z(x,y)$是由方程$z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}dt=1$确定的函数, 计算$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}$.

(k)880第四章基础填空14

设$z=z(x,y)$由方程$z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}dt=0$确定, 则$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$_____

(l)26版1000第十三章强化19

19.已知方程$2z-\mathrm{e}^z+1+\int_y^{x^2}\sin(t^2)dt=0$在$(x_0,y_0,z_0)=(1,1,0)$的某个邻域中确定了一个隐函数$z=z(x,y)$, 求$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

***ii*) 抽象**

(*a*)26版1000第十三章强化20

20.设$f(u,v)$存在二阶连续偏导数,$z=z(x,y)$是由方程$f(z-x,z-y)=1$确定的隐函数,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

***b*) 一个方程两个未知数**

(1)26版660数一二三第245题

245 设$z=x^2+2y^2$,其中$y=y(x)$是由方程$x^2-xy+y^2=1$确定的隐函数,且$y(1)=1$,则$z''(1)$等于

A. 6. B. 18. C. -6. D. -18.

(2)900第四章数二*B*类24

24 已知函数$f(u)$具有二阶导数,且$f'(1)=1$,函数$y=y(x)$由方程$\ln y-xe^y=1-\cos x$所确定.设$z=f(y-\arctan ex)$,求$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$,$\left.\frac{d^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

(3)900第四章数二A类35

35 设函数$f(u,v)$具有二阶连续偏导数,$y=y(x)$由方程$\tan y-y=x$所确定,令$z(x)=f(x,x-y)$,计算$\left.\frac{d^2z}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1-\frac{\pi}{4}}$.

c)两个方程三个未知数

(1)1995数一

设$u=f(x,y,z),\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0,y=\sin x$,其中$f,\varphi$都具有一阶连续偏导数,且$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$,求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

(2)1997数三

设$u=f(x,y,z)$有连续偏导数,$y=y(x)$和$z=z(x)$分别由方程$\mathrm{e}^{xy}-y=0$和$\mathrm{e}^x-xz=0$所确定,求$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

(3)880第四章基础解答1

【1】设$u=f(x,y,z)$有连续偏导数,$y=y(x),z=z(x)$分别由方程$e^{xy}-y=0$和$e^{z}-xz=0$确定,求$\frac{du}{dx}$.

(4)1998年江苏省高等数学竞赛题(重点)

[例5.7](1)(江苏省高等数学竞赛题,1998年)设$y=y(x),t=t(x)$由方程$y=f(x,t)$与$F(x,y,t)=0$确定,其中$f(x,t),F(x,y,t)$均为可微函数,则$\frac{dy}{dx}=$_____;

(5)1999数一

设$y=y(x),z=z(x)$是由方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$所确定的函数,其中f和F分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数,求$\frac{dz}{dx}$.

(6)2001 数三

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定:$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^{x}=\int_{0}^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$, 求 $\frac{du}{dx}$.

(7)880 第四章基础解答 2

设 $y=y(x),z=z(x)$ 由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=3x,\\2x-3y+5z=4\end{cases}$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx},\frac{dz}{dx}$.

(8)880 第四章基础填空 7

设 $\begin{cases}y=f(x,t),\\F(x,y,t)=0,\end{cases}$ f,F 有一阶连续偏导数, 则 $\frac{dy}{dx}=$_____

(9)880第四章综合解答19

设$x=x(y),z=z(y)$由方程组$\begin{cases}F(y-x,y-z)=0,\\ G\left(xy,\dfrac{z}{y}\right)=0\end{cases}$确定，求$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

***d*) 两个方程四个未知数**

(1)1994年江苏省高等数学竞赛题

(2)(江苏省高等数学竞赛题,1994年)设$z=z(x,y)$由方程组$\begin{cases}x=(t+1)\cos z,\\ y=t\sin z\end{cases}$确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$_____.

e) 两个方程五个未知数

(1)26版660数一二三第246题

246 设方程组 $\begin{cases} x=u+vz, \\ y=-u^2+v+z \end{cases}$ 在点 $(2,1,1)$ 的某一个邻域内确定隐函数 $u(x,y,z)$ 与 $v(x,y,z)$, 且 $u(2,1,1)>0$, 则 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$

A. $\frac{1}{9}$.　　B. $\frac{1}{3}$.　　C. $\frac{2}{9}$.　　D. $\frac{2}{3}$.

***f*) 三个方程四个未知数**

(1)880 第四章综合解答 1

已知 $x+y-z=\mathrm{e}^z, xe^x=\tan t, y=\cos t$, 求 $\left.\frac{d^2z}{dt^2}\right|_{t=0}$.

g) 三个方程五个未知数

(1)26版1000第十三章强化42

42.设 $z=z(x,y)$ 由 $\begin{cases} x=ue^v, \\ y=uv, \\ z=v \end{cases}$ $(u>0, v>1)$ 所确定, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$ (　).

A. $\frac{xy}{z(1-z)^3}$　　B. $\frac{xy}{z(z-1)^3}$　　C. $\frac{z}{xy(1-z)^3}$　　D. $\frac{z}{xy(z-1)^3}$

5.求全微分

a) 具体

(1) 普通函数

ii) 1987 数三

$z=\arctan\dfrac{x+y}{x-y}$, 求 d$z$.

ii)1991 数三

设 $z=\mathrm{e}^{\sin xy}$, 则 d$z=$_____.

iii)1998 数三

设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$, 求 d$z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

iv)2005 数三

设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$_____

v)2011 数三

设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$_____

vi)880 第四章基础填空 4

设 $z=(1+xy)^{y}$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$_____

vii) 2020数二三

11.设 $z=\arctan[xy+\sin(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$_____

viii)26版1000第十三章基础1

1.设 $z=\arctan[xy+\cos(x+y)]$, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,\pi)}=$_____.

ix)26版1000第十三章基础11

11.函数 $z=x^y$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分为 $\mathrm{d}z=$_____.

x)880 第四章综合选择 4

【4】设函数 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{|x|}{y}}$，则在点 $(0,1)$ 处（ ）.

A. $f'_x(0,1)=f'_y(0,1)=1$

B. $df\big|_{(0,1)}=\mathrm{d}y$

C. $df\big|_{(0,1)}=\mathrm{d}x$

D. $df\big|_{(0,1)}$ 不存在

xi)880 第四章综合解答 16

【16】设 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\varphi(x,y)$，$\varphi(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，且 $\varphi(0,0)=0$.

(*I*) 求 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$；

(*II*) 证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，并求全微分 $df\big|_{(0,0)}$.

(2) 隐函数

i)1991 数一

由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$

ii)1993 数三

设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $z-y-x+xe^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数, 求 $\mathrm{d}z$.

iii)26 版 660 数一二三第 232 题

232 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z-y+2xe^{z-x-y}=0$ 所确定的隐函数, 则函数 $z(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$

A. $2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.　　B. $-2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.　　C. $2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.　　D. $-2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

iv)2015 数一三

若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^z+xyz+x+\cos x=2$ 确定, 则 $dz\big|_{(0,1)}=$_____

v)2014 数二;880 第四章基础填空 11

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $dz\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=$_____

vi)2015 数二;26 版 660 数一二三第 92 题

若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定, 则 $dz\big|_{(0,0)}=$_____

vii)880 第四章基础填空 6

设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x=ze^{y+z}$ 确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(\mathrm{e},0)}=$_____

viii)26 版 1000 第十三章强化 12

12.设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $\mathrm{e}^{x-2y+3z}-2xe^{-y}\cos z=1$ 所确定的函数, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$_____.

ix)26 版 660 数一二三第 93 题

设 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2=3$ 所确定, 则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,1,1)}=$_____.

x)26版660数一二三第98题

设$z=z(x,y)$是由方程$x+y+z=\int_0^{xyz}\mathrm{e}^{-t^2}dt$确定的隐函数, 则$\mathrm{d}z=$_____.

xi)26版1000第十三章强化14

14.设函数$z=z(x,y)$由方程$\sin(x-y)+\int_1^z\mathrm{e}^{-t^2}dt=0$确定, 则$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$_____.

xii)2002数三

设函数$u=f(x,y,z)$有连续偏导数, 且$z=z(x,y)$由方程$xe^x-ye^y=ze^z$所确定, 求$\mathrm{d}u$.

xiii)900 第四章数二 *A* 类 36

36 设函数 $u(x,y)=f(x,y,z(x,y))$ 有连续偏导数, 且 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\sin x-y\cos y=z\arctan z$ 所确定, 求 $\mathrm{d}u$.

xiv)900 第四章数二 *A* 类 25

25 设函数 $z(u,v)=ue^{v}w^{2}$, 其中 $w=w(u,v)$ 由方程 $\mathrm{e}^{\frac{u}{w}}+\mathrm{e}^{\frac{v}{w}}=4$ 所确定, 则当 $u=\ln 2, v=\ln 2$ 时, $\mathrm{d}z=$ _____.

xv)900 第四章数二 *A* 类 24

24 设函数 $F(u,v)$ 具有一阶连续偏导数, 满足 $F_1'+\frac{1}{\sqrt{3}}F_2'\neq 0$, 已知 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(xyz,\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)=0$ 所确定的隐函数, 且 $z(1,1)=1$, 则 $\mathrm{d}z\Big|_{(1,1)}=$ _____.

***b*)抽象函数**

(1)2006数三

设函数$f(u)$可微,且$f'(0)=\frac{1}{2}$,则$z=f(4x^2-y^2)$在点$(1,2)$处的全微分$\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$_____

(2)2016数一三;25版660数一二三第102题

设函数$f(u,v)$可微,$z=z(x,y)$由方程$(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$确定,则$\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$

(3)2021数一二三

(6)设函数$f(x,y)$可微,且$f(x+1,\mathrm{e}^x)=x(x+1)^2,f(x,x^2)=2x^2\ln x$,则$df(1,1)=$(　).

A. $\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　　B. $\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$　　C. $\mathrm{d}y$　　D. $-\mathrm{d}y$

(4)880第四章综合选择7

【7】设$f(x,y)$有一阶连续偏导数，且$f(x,y)=1-x-y+o\left(\sqrt{(x-1)^2+y^2}\right)$，$g(x,y)=f(x+y,xy)$，则全微分$dg\big|_{(1,0)}=$(　).

A. $-2\mathrm{d}y$　　B. $-\mathrm{d}x$　　C. $-\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$　　D. $\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$

(5)26版1000第十三章强化9

9.设函数$z=f(x,y)(xy\neq 0)$满足$f\left(xy,\frac{y}{x}\right)=y^2(x^2-1)$，则$\mathrm{d}z=$_____.

6.已知偏导数相关求多元函数(偏积分)

a) 已知偏导数

(1)26版1000第十三章基础6

6.设函数$f(x,\sin x)=x+\sin x, f_x'(x,y)=1+2\cos x$，则$f_y'(x,y)\big|_{y=\sin x}=$_____.

(2) 北京市 2015 年竞赛题； 880 第四章综合填空 1(重点)

【例 5.8】(北京市 2015 年竞赛题) 设 $f(x,y)$ 满足 $f''_{yy}(x,y)=2, f'_y(x,0)=x, f(x,0)=1$, 则 $f(x,y)=$_____.

(3)25 版 660 数一二三第 96 题

96 设 $z=f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$, 且 $f(x,0)=x, f(0,y)=y^2$, 则 $f(x,y)=$_____.

(4)880 第四章综合填空 2

设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数, 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=x+y$, 且 $z(x,0)=x, z(0,y)=y^2$, 则 $z(x,y)=$

(5)900第四章数二B类22

设函数$z(x,y)$满足$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^x+2y$, 且$z(x,0)=x, z(0,y)=2y$, 则$z(x,y)=$_____.

(6)26版1000第十三章基础7

7.设函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数, 且满足$\frac{\partial^2[f(x,y)]}{\partial x\partial y}=1, f(0,y)=\sin y, f(x,0)=\sin x$, 则$f\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=$_____.

***b*) 已知全微分**

(1)2017数二三

(12) 设函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数, 且$df(x,y)=ye^y\mathrm{d}x+x(1+y)\mathrm{e}^y\mathrm{d}y, f(0,0)=0$, 则$f(x,y)=$

_____

(2)2023 数三

12.已知函数 $f(x,y)$ 满足 $df(x,y)=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, $f(1,1)=\dfrac{\pi}{4}$, 则 $f(\sqrt{3},3)=$_____

(3)880 第四章基础填空 13

设 $z(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$, 则 $z(x,y)=$_____

(4)26 版 660 数一二三第 249 题

249 已知 $df(x,y)=(2y^2+2xy+3x^2)\mathrm{d}x+(4xy+x^2)\mathrm{d}y$, 则 $f(x,y)=$

A. $2xy^2+x^2y$.

B. $2xy^2+x^2y+x^3$.

C. $2xy^2+x^2y+x^3+C$.

D. $3xy^2+x^2y+x^3+C$.

(5)900 第四章数二 A 类 27

27 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数, 且 $d[f(x,y)]=[\cos(x-y)-\sin(x-y)]e^{y-x}(\ dx-dy)$, $f(0,0)=0$, 则 $f(x,y)=$_____.

(6)26 版 1000 第十三章基础 10

10.设 $Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2},y>0,P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 是某二元函数的全微分, 则 $P(x,y)$ 可取为( ).

A. $y^2-\dfrac{x^2}{y^3}$　　B. $x^2-\dfrac{1}{y}$　　C. $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{x^2}{y^3}$　　D. $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y}$

(7)880 第四章基础填空 16

设 $\dfrac{(x+ky)dx+y\ dy}{(x+y)^2}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 则 $k=$_____

(8)26版1000第十三章强化13

13.已知 $\dfrac{ay\mathrm{d}y+x\ \mathrm{d}x}{x^2+y^2-1}\,(x^2+y^2<1)$ 是某二元函数的全微分, 则 $a=$(　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

(9)26版660数一二三第238题

238 设二元函数 $U(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $dU=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$, 则 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 等于

A. 2.　　B. 1.　　C. 0.　　D. -1.

c) 已知关系式

(1) 姜晓千真题同源150(重点)

【例 5.5】(1) 设 $f(x,y)$ 可微, 满足 $f_x'(x,y)=-f(x,y), f'(x,y)=\mathrm{e}^{-x}\cos y$, 且 $f(0,0)=0$, 求 $\int f(x,x)\mathrm{d}x$.

(2)2017年第八届全国大学生数学竞赛题(重点)

(2)(第八届全国大学生数学竞赛题,2017年)设$f(x,y)$可微,满足$f'_x(x,y)=f(x,y)$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right]^n=\mathrm{e}^{\cot y}$,且$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$,求$f(x,y)$.

(3)900第四章数二C类2

2设$f(x,y)$为定义在全平面上的正值可微函数,满足$f(0,0)=1,\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^{y}+\mathrm{e}^{-y}}$.若对任意$x$,都有

$\lim\limits_{t\to0}\left[\dfrac{f(x+t,0)}{f(x,0)}\right]^{\frac{1}{t}}=\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x^2-2x+4}}$,求$f(x,y)$.

(4)2009年第十二届北京市大学生数学竞赛题(重点)

(第二十届北京市大学生数学竞赛题,2009年)设$f(x,y)$可微,满足$\frac{f_y'(0,y)}{f(0,y)}=\cot y, f_x'(x,y)=-f(x,y)$,且$f\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=1$,求$f(x,y)$.

(5)25版660数一二三第90题

90已知可微函数$f(u,v)$满足$\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=(u+v)e^v$,且$f(0,v)=(v-2)e^v$.则$f(x,x+y)=$_____.

(6)880第四章基础解答11

【11】设$z=\frac{u}{y}+e^{-ux}+f(u), u(x,y)$满足$xe^{-ux}-f'(u)=\frac{1}{y}$,其中$u(x,y)$和$f(u)$均可微,且$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}$,求$u(x,y)$.

*D.*多元微分应用

1.单调性

a)2012 数二;880 第四章综合选择 5;26 版 660 数一二三第 228 题

(5) 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且对任意 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是 ( )

A. $x_1>x_2,y_1<y_2$. B. $x_1>x_2,y_1>y_2$. C. $x_1<x_2,y_1<y_2$. D. $x_1<x_2,y_1>y_2$.

b)900 第四章数二 *A* 类 6

6 设函数 $f(x,y)$ 可微, 且对任意的 x,y 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}<0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}>0$, 则使不等式 $f(x_1,y_1)<f(x_2,y_2)$ 成立的一个充分条件是 ( )

A. $x_1>x_2,y_1<y_2$. B. $x_1>x_2,y_1>y_2$. C. $x_1<x_2,y_1<y_2$. D. $x_1<x_2,y_1>y_2$.

c)2017 数二

(5) 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数, 且对任意的 (x,y) 都有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$, 则 ( )

A. $f(0,0)>f(1,1)$. B. $f(0,0)<f(1,1)$. C. $f(0,1)>f(1,0)$. D. $f(0,1)<f(1,0)$.

d)900 第四章数二 *A* 类 7

7 已知二元函数 $f(x,y)$ 存在一阶偏导数.对于任意 y, 若 $|x_1|>|x_2|$, 则 $f(x_1,y)>f(x_2,y)$；对于任意 x, 若 $|y_1|>|y_2|$, 则 $f(x,y_1)<f(x,y_2)$.下列结论中, 正确的是 ( )

A. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-1,1)} \geqslant \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,-1)}$.

B. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,-1)} \geqslant \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(-1,1)}$.

C. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} \geqslant \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(-1,-1)}$.

D. $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(-1,-1)} \geqslant \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}$.

2.无条件极值

a) 概念题

(1)2003 数三

(2) 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值, 则下列结论正确的是 ( )

A. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

B. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

C. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

D. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

(2)880 第四章基础选择 6

【6】设可微函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处取得极大值, 则 ( )

A. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数小于零

B. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数大于零

C. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数等于零

D. $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处导数不存在

(3)2011 数一二

(5) 设函数$f(x),g(x)$均有二阶连续导数, 满足$f(0)>0,g(0)<0$, 且$f'(0)=g'(0)=0$, 则函数$z=f(x)g(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是 ( )

A. $f''(0)<0,g''(0)>0.$

B. $f''(0)<0,g''(0)<0.$

C. $f''(0)>0,g''(0)>0.$

D. $f''(0)>0,g''(0)<0.$

(4)900 第四章数二 A 类 17

17 设函数$f(x)$具有二阶连续导数, 且$f(x)>0,f'(0)=0$, 则函数$z(x,y)=f(x)^{f(y)}$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是 ( )

A. $f(0)<1,f''(0)<0.$

B. $f(0)>1,f''(0)<0.$

C. $f(0)<1,f''(0)>0.$

D. $f(0)>1,f''(0)>0.$

(5)900 第四章数二 B 类 11

11 已知函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数, 函数$g(x)$具有二阶导数且$g(0)=0$.对于函数$z(x,y)=f(g(x),g(y))$, 下列说法中, 正确的是 ( )

A. 若$x=0$是$g(x)$的极值点且$f_1'(0,0)=f_2'(0,0)=0$, 则点$(0,0)$是$z(x,y)$的极值点.

B. 若点$(0,0)$是$z(x,y)$的极值点且$f_1'(0,0)=f_2'(0,0)=0$, 则$x=0$是$g(x)$的极值点.

C. 若点$(0,0)$是$f(x,y)$的极值点且$f_{11}''(0,0)f_{22}''(0,0)-[f_{12}''(0,0)]^2\neq 0,g'(0)\neq 0$, 则点$(0,0)$是$z(x,y)$的极值点.

D. 若点$(0,0)$是$z(x,y)$的极值点且$z_{11}''(0,0)z_{22}''(0,0)-[z_{12}''(0,0)]^2\neq 0,g'(0)=0$, 则点$(0,0)$是$f(x,y)$的极值点.

(6)26版1000第十三章强化22

22.设函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数，且在点(x_0,y_0)处取极大值，记$a=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)}, b=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)}$，则（ ）.

A. $a>0,b>0$　　B. $a\geqslant 0,b\geqslant 0$　　C. $a<0,b<0$　　D. $a\leqslant 0,b\leqslant 0$

***b*) 直接给出函数**

(1)1993年第五届北京市大学生数学竞赛题(重点)

【例5.9】(第五届北京市大学生数学竞赛题,1993年)

求$f(x,y)=\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y^2}[(x-a)^2+(y-b)^2]}(y\neq 0,b>0)$的最大值.

(2)880 第四章综合解答 10

求 $f(x,y)=\frac{1}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2y^2}[(x-a)^2+(y-1)^2]}(y\neq 0,a$ 为常数) 的极值.

(3)2021 数三

求函数 $f(x,y)=2\ln|x|+\frac{(x-1)^2+y^2}{2x^2}$ 的极值.

(4)26版1000第十三章强化23

23.设$a>0,b>0$, 函数$f(x,y)=2\ln|x|+\dfrac{(x-a)^2+by^2}{2x^2}$在$x<0$时的极小值为2, 且$f''_{yy}(-1,0)=1$.

(1) 求a,b的值;

(2) 求$f(x,y)$在$x>0$时的极值.

(5)2009数一三;26版660数一二三第94题

求二元函数$f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$的极值.

(6)2012数一二;880第四章综合解答9

求函数$f(x,y)=xe^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$的极值.

(7)2013数一

求函数$f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$的极值.

(8)900第四章数二A类40

求函数$f(x,y)=(3x^3-y)\mathrm{e}^{x-y}$的极值.

(9)2017数三

(2) 二元函数$z=xy(3-x-y)$的极值点是( )

A. $(0,0)$. B. $(0,3)$. C. $(3,0)$. D. $(1,1)$.

(10)26版660数一二三第236题

236 设函数$f(x,y)=xy(a-x-y)$, 则

A. 当$a>0$时, $f(x,y)$在点$(0,a)$处取极大值.

B. 当$a>0$时, $f(x,y)$在点$\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$处取极小值.

C. 当$a<0$时, $f(x,y)$在点$\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3}\right)$处取极大值.

D. $f(x,y)$在点$(0,0)$处不取得极值.

(11)2020数一二三

求函数$f(x,y)=x^3+8y^3-xy$的极值.

(12)900第四章数二A类28

函数$f(x,y)=x^3+y^3-xy$的极小值为_____.

(13)26版1000第十三章基础23

23.求函数$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$的极值.

(14)26版1000第十三章强化24

24.设函数$f(x,y)=x^2+xy$, 则点$(0,0)$(　).

A. 不是驻点,也不是极值点

B. 不是驻点, 但是极值点

C. 是驻点, 但不是极值点

D. 是驻点,也是极值点

(15)2024数二三

函数$f(x,y)=2x^3-9x^2-6y^4+12x+24y$的极值点是_____.

(16)26版1000第十三章基础24

24.求函数$f(x,y)=x^3-3xy-y^2-y-9$的极值.

(17)26版1000第十三章强化38

38.设$f(x,y)=x^3-y^3-3x+3y$, 则( ).

A. $f(1,-1)$是极大值,$f(-1,1)$是极小值　　B. $f(1,-1)$是极小值,$f(-1,1)$是极大值

C. $f(1,1)$是极大值,$f(-1,-1)$是极小值　　D. $f(1,1)$是极小值,$f(-1,-1)$是极大值

(18)26版1000第十三章基础26

26.求 $f(x,y)=x^4-\frac{1}{12}x^6-2x^2y-\frac{1}{2}y^2$ 的极值点.

(19)26版660数一二三第235题

235 函数 $f(x,y)=kx^2+y^3-3y$ 在点 $(0,1)$ 处

A. 取极大值.

B. 取极小值.

C. 不取得极值.

D. 是否取得极值与 k 的取值有关.

(20)26版1000第十三章强化48

48.设函数 $z_1=x^3+y^2$ 与 $z_2=(x^2+y^2)^2$, 易知有驻点 $(0,0)$, 则在该点处( ).

A. 函数 $z_1=x^3+y^2$ 有极小值, 而函数 $z_2=(x^2+y^2)^2$ 无极值

B. 函数 $z_1=x^3+y^2$ 无极值, 而函数 $z_2=(x^2+y^2)^2$ 有极小值

C. 上述两个函数都有极值

D. 上述两个函数都无极值

(21)900第四章数二A类30

30 已知函数$f(x,y)=(x-10)(70-5x+4y)+(y-15)(65+6x-7y)$, 若点$(x_0,y_0)$是$f(x,y)$的极大值点, 则$x_0+y_0=$_____.

(22)2014年江苏省竞赛题;900第四章数二A类;26版1000第十三章基础9(重点)

求$f(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$的极值.

(23)2023数一

求函数$f(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$的极值.

(24)26版1000第十三章基础22

22.求函数$f(x,y)=(y-x)(y-x^2)$的极值.

(25)900第四章数二B类28

求函数$f(x,y)=\left(x+\frac{1}{2}y^2\right)\left(x-\frac{1}{3}y^3\right)$的极值.

(26)2023数二

求函数$f(x,y)=xe^{\cos y}+\frac{x^2}{2}$的极值.

(27)26版1000第十三章强化39

已知函数$f(x,y)=xe^{\cos y}+\frac{x^2+\mathrm{e}^2}{2}$, 则( ).

A. $(-\mathrm{e},2\pi)$是$f(x,y)$的极小值点

B. $(-\mathrm{e},2\pi)$是$f(x,y)$的极大值点

C. $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},3\pi\right)$是$f(x,y)$的极小值点

D. $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},3\pi\right)$是$f(x,y)$的极大值点

(28)26版1000第十三章强化25

25.求函数$f(x,y)=\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$的极值.

(29)26版1000第十三章强化40

40.设$f(x,y)=(x-y^2+1)\mathrm{e}^{-x}$, 则函数$f(x,y)$( ).

A. 有一个极小值,没有极大值

B. 有一个极大值,没有极小值

C. 有一个极大值,一个极小值

D. 没有极值

(30)880第四章基础选择7

【7】设$f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$, 则$f(x,y)$在点$P\left(\frac{1}{2},-1\right)$处( )

A. 取得极小值$-\frac{e}{2}$　　B. 取得极大值$-\frac{e}{2}$　　C. 取得极大值e　　D. 不取得极值

(31)880第四章基础解答4

求$f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$的极值

(32)26版1000第十三章强化41

41.已知$F(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin x-\sin^2 x+b)^2\cos x\mathrm{d}x$, 则使得$F(a,b)$取得最小值的$a,b$分别为( ).

A. $1,\frac{1}{6}$　　B. $1,-\frac{1}{6}$　　C. $-1,\frac{1}{6}$　　D. $-1,-\frac{1}{6}$

c) 先求函数再求极值

(1) 已知偏导数

i)2015 数二

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^{x}, f'_{x}(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^{x}, f(0,y)=y^{2}+2y$, 求 $f(x,y)$ 的极值.

ii)900 第四章数二 *B* 类 31

31 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2x(1-x^{2})\mathrm{e}^{-x^{2}}, f'_{x}(x,0)=0, f(0,y)=\dfrac{y^{2}}{2}$, 求 $f(x,y)$ 的极值.

iii)900 第四章数二 B 类 30

30 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f'_x(x,y)=2x+y+1, f'_y(x,y)=x+2y+3, f(0,0)=1$.求 $f(x,y)$ 以及 $f(x,y)$ 的极值点, 并判定极值点类型.

iv)26 版 1000 第十三章基础 27

27.设 $\frac{\partial f}{\partial x}=(x^2+y^2-4x+4)\mathrm{e}^x, \frac{\partial f}{\partial y}=2ye^x, f(0,0)=0$, 求:

(1)$f(x,y)$ 的表达式;

(2)$f(x,y)$ 的极值.

v)26版1000第十三章强化32

32.已知$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y+1,\frac{\partial u}{\partial y}=x+2y+3,u(0,0)=1$.求$u(x,y)$及$u(x,y)$的极值, 并求出极值是极大值还是极小值? 说明理由.

vi)26版1000第十三章强化33

33.已知$f(x,y)$满足$\mathrm{e}^{-2x}\frac{\partial f}{\partial x}=4y+2y^2+2x+1$, 且$f(0,y)=2y+y^2$.求:

(1)$f(x,y)$的表达式;

(2)$f(x,y)$的极值.

(2) 已知全微分

i)2009 数二

(3) 设函数 $z=f(x,y)$ 的全微分为 $\mathrm{d}z=x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$ 则点 $(0,0)$ (　)

A. 不是 $f(x,y)$ 的连续点.　　B. 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

C. 是 $f(x,y)$ 的极大值点.　　D. 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

ii)2025 数二

设函数 $f(x,y)$ 可微且满足 $df(x,y)=-2xe^{-y}\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{-y}(x^2-y-1)\mathrm{d}y, f(0,0)=2$, 求 $f(x,y)$, 并求 $f(x,y)$ 的极值.

iii)26 版 1000 第十三章强化 37

37.设二元函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=(3x^2-3)\mathrm{d}x+(6y-6)\mathrm{d}y$, 则 (　).

A. $f(1,1)$ 是极小值, $f(-1,1)$ 不是极值　　B. $f(1,1)$ 是极大值, $f(-1,1)$ 不是极值

C. $f(1,1)$ 是极大值, $f(-1,1)$ 是极小值　　D. $f(1,1)$ 是极小值, $f(-1,1)$ 是极大值

(3) 已知关系式

i)2022 数二

已知可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}-\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}=2(u-v)\mathrm{e}^{-(u+v)}$, 且 $f(u,0)=u^2\mathrm{e}^{-u}$.

(I) 记 $g(x,y)=f(x,y-x)$, 求 $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$;

(II) 求 $f(u,v)$ 的表达式与极值.

ii)880 第四章综合解答 21

【21】设可微函数 $f(u,v)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v}=(u+v)\mathrm{e}^{u-v}$, 且 $f(0,v)=0$, 若 $u=x,v=x+y$, 求:

$(I)\frac{\partial f(x+x+y)}{\partial x}$

$(II)f(u,v)$ 的极值.

iii)880 第四章综合解答 23

【23】设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数, $u=x-\frac{1}{2}y, v=x+\frac{1}{2}y$, 且满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12a(a\neq 0)$.

(*I*) 求 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}$;

(*II*) 若 $\frac{\partial f(u,0)}{\partial u}=-3u^2, f(0,v)=-v^3$, 求 $f(u,v)$ 的极值.

d)多元隐函数极值

(1)2004 数一； 880 第四章综合解答 12

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数, 求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

(2)2016数二

已知函数$z=z(x,y)$由方程$(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$确定，求$z=z(x,y)$的极值.

(3)姜晓千真题同源150(重点)

设$z=z(x,y)$由方程$2x^3-6xy+3y^2+\frac{1}{e}z\ln z=0$确定，求$z=z(x,y)$的极值.

(4)26版1000第十三章强化26

26.求由方程$2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$所确定的函数$z=z(x,y)$的极值，并指出是极大值还是极小值.

(5)26版660数一二三第101题

101 设方程式$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-10=0$确定某隐函数$z=z(x,y)>0$, 则$z=z(x,y)$的极_____值点是_____, 相应的极值是_____.

(6)900第四章数二B类29

29 已知函数$z=z(x,y)$由方程$(x^2+y^2)z+\mathrm{e}^{z-1}+2(x+y)+1=0$确定, 求$z=z(x,y)$的极值.

(7)880第四章综合选择6

【6】设$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有二阶连续偏导数, 且$F(x_0,y_0)=0, F_x'(x_0,y_0)=0, F_y'(x_0,y_0)>0, F_{xx}''(x_0,y_0)<0$, 则由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=y(x)$在$x=x_0$处( ).

A. 取得极小值　　B. 取得极大值

C. 不取得极值　　D. 不能确定是否取得极值

e) 已知极值反求参数

(1)880 第四章综合解答 7

设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}(ax+b-y^2)$ 在点 $(-1,y_0)$ 处取得极大值, 求 a,b 满足的条件.

(2)26 版 1000 第十三章强化 21

21.已知函数 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-x}(ax+b-y^2)$, 若 $f(-1,0)$ 为其极大值, 则 a,b 满足 _____.

(3)900 第四章数二 A 类 41

41 设函数 $f(x,y)=2x+5y-ax^2-3ay^2-bxy$, 问: 当参数 a,b 满足什么条件时, $f(x,y)$ 有唯一极小值?

(4)26版1000第十三章强化27

27.设$f(x,y)=3x+4y-ax^2-2ay^2-2bxy$.当$a,b$满足何种条件时,$f(x,y)$有唯一的极大值,并说明理由.

(5)880第四章综合解答6

【6】设$f(x,y)=x^3+y^3-ax^2-by^2(a>0,b>0)$有极小值$-8$,求$a,b$的值.使得椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$所围面积最大.

(6)900第四章数二B类17

17 已知函数$f(x,y)=x^2+2kxy+y^2$在点$(0,0)$处取得极值,则参数k的取值范围是( )

A. $[-1,1]$.　　B. $[-1,0)\cup(0,1]$.　　C. $(-1,1)$.　　D. $(-1,0)\cup(0,1)$.

3.条件极值

a) 直接给出

(1) 单约束

i)2006 数一二三

(10) 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数, 且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$.已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ( )

A. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

B. 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

C. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.

D. 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$, 则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

ii)2010 数三

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

iii)900 第四章数二 *A* 类 42

求函数 $f(x,y)=3x^2+3y^2-7xy$ 在约束条件 $x^2+y^2-xy=9$ 下的最大值和最小值.

iv)900 第四章数二 *B* 类 32

设函数 $f(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+y^2-2\ln z$, 求该函数在条件 $x^2+2y^2+z^2=3$ 下的最小值.

v)880 第四章综合解答 5

求函数 $f(x,y)=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在条件 $x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值.

vi)880 第四章综合解答 8

【8】设函数 $f(x,y)=x^2+2kxy+y^2(k>0)$ 满足 $x^2+y^2=1$ 的最大值与最小值分别为 λ_1 与 λ_2,求 $\lambda_1+\lambda_2$.

vii)880 第四章综合解答 11

求 $u=xy+2xz+2yz$ 在条件 $xyz=1$ 下的最小值.

viii)880 第四章综合解答 20

【20】设 α,β 为正数,且 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，求 $f(x,y)=\frac{1}{\alpha}x^{\alpha}+\frac{1}{\beta}y^{\beta}$ 在条件 $xy=1(x>0,y>0)$ 下的最小值.

ix)900 第四章数二 *A* 类 46

46 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0(z>2)$ 确定, 求函数 $z=z(x,y)$ 在条件 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 下的最大值和最小值.

x)26 版 1000 第十三章基础 25

25.求函数 $f(x,y)=xy$ 在约束条件 $x+y=2$ 下的极值.

xi)26版1000第十三章强化30

30.求函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在约束条件 $x+2y=1$ 与 $x^2+2y^2+z^2=1$ 下的最值.

xii)26版660数一二三第251题

251 设有三个正数 x,y,z 满足 $x+y+z=a$, 其中 $a>0$ 为常数, 又 $xyz\leqslant b$, 则 b 的最小取值是

A. $\frac{a^3}{21}$.　　B. $\frac{a^3}{18}$.　　C. $\frac{a^3}{9}$.　　D. $\frac{a^3}{27}$.

xiii)26版1000第十三章强化34

34.设函数$f(x,y)$具有二阶连续偏导数, 且满足$f(x,0)=x^2, f'_y(x,0)=\sqrt{2}x, f''_{yy}(x,y)=4$, 求$f(x,y)$在约束条件$x^2+2y^2=4$下的最大值与最小值.

xiv)900第四章数二*B*类33

33某行星上的磁场强度为$M(x,y,z)=6x-y^2+xz+50$, 行星表面的点(x,y,z)满足方程$x^2+y^2+z^2=20$.科学家欲在该行星表面磁场强度最小处架设一台天文望远镜进行探测, 求该望远镜的选址坐标(x_0,y_0,z_0).

(2) 双约束

i)2008 数二;880 第四章基础解答 8

求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在约束条件 $z=x^2+y^2$ 和 $x+y+z=4$ 下的最大值与最小值.

ii)900 第四章数二 *A* 类 43

43 求函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ 在约束条件 $z=x^2+2y^2$ 和 $x+y-z=-3$ 下的最大值和最小值.

iii)26 版 1000 第十三章强化 28

28.求 $|z|$ 在约束条件 $\begin{cases}x^2+9y^2-2z^2=0,\\ x+3y+3z=5\end{cases}$ 下的最大值与最小值.

***b*) 需要处理条件**

(1) 距离

i)2013 数二

求曲线 $x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 上的点到坐标原点的最长距离与最短距离.

ii)26 版 1000 第十三章强化 50

50.求曲线 $x^2+xy+y^2+2x-2y-12=0$ 上的点到原点距离的最大值和最小值.

iii) 姜晓千真题同源 150(重点)

求椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上的点到直线 $2x+3y-6=0$ 的最长与最短距离.

iv)880 第四章综合解答 15

【15】设函数 $f(x,y)$ 的全微分为 $df(x,y)=(2ax+by)\mathrm{d}x+(2by+ax)\mathrm{d}y(a,b$ 为常数), 且 $f(0,0)=-3, f_x'(1,1)=3$.试求:

$(I) f(x,y)$;

(II) 点 $(-1,-1)$ 到曲线 $f(x,y)=0$ 上的点的距离的最大值.

v)880 第四章基础解答 6

求双曲线 $xy=4$ 与直线 $2x+y=1$ 之间的最短距离.

vi)900 第四章数二 *A* 类 31

圆 $x^2+y^2=3$ 上到点 $(0,0),(2,0),(0,1)$ 的距离的平方和最小的点为 _____.

(2) 面积

i)1988 数二

将长为 a 的铁丝切成两段, 一段围成正方形, 另一段围成圆形, 问这两段铁丝各长为多少时,正方形与圆形的面积之和为最小.

ii)2018 数一二三

将长为 $2m$ 的铁丝分成三段, 依次围成圆、正方形与正三角形.三个图形的面积之和是否存在最小值? 若存在, 求出最小值.

iii)26 版 1000 第十三章强化 31

31.求曲线 $x^2-xy+y^2=1(x>0,y>0)$ 上的一点 P, 使该点处的切线与 x 轴, y 轴所围面积最小.

iv)880 第四章基础解答 9

【9】在第一象限内, 过曲线 $3x^2+2xy+3y^2=a$ 上任一点作其切线, 切线与两坐标轴所围成的三角形面积的最小值为 $\frac{1}{4}$, 求 a 的值.

v) 姜晓千真题同源 150(重点)

[例 5.12] (10) (1) (江苏省高等数学竞赛题, 1994 年) 设 a,b 满足 $\int_a^b|x|\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a\leqslant 0\leqslant b)$, 求曲线 $y=x^2+ax$ 与直线 $y=bx$ 所围区域的面积的最值.

c) 数一专项

(1)2021 数一

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+2y^2-z=6,\\4x+2y+z=30,\end{cases}$ 求 C 上的点到 xOy 坐标面距离的最大值.

(2)2008 数一；26 版 1000 第十三章强化 29

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$ 求曲线 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

(3) 姜晓千真题同源 150

(2) (数学一要求) (江苏省高等数学竞赛题,1994 年) 求椭球面 $x^2+2y^2+4z^2=1$ 上的点到平面 $x+y+z=\sqrt{7}$ 的最长与最短距离.

(4) 姜晓千真题同源 150

(2) (数学一要求) 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面, 求切平面与三个坐标面所围成四面体的最小体积.

(5)880第四章基础解答5

设曲面$S:(x-y)^2-z^2=1$, 求坐标原点到S的最短距离.

(6)880第四章综合解答5

【5】求椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0)$在第一卦限上的切平面与三个坐标面围成的四面体的最小体积。

4.闭区域最值

a) 判断最值点位置

(1)2014 数二

(6) 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则 ( )

A. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

B. $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

C. $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得.

D. $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得.

(2)26 版 1000 第十三章基础 19

19.设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}>0$ 与 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 则 ( )

A. $f(x,y)$ 的最小值点和最大值点都在 D 的内部

B. $f(x,y)$ 的最小值点和最大值点都在 D 的边界上

C. $f(x,y)$ 的最小值点在 D 的内部, 最大值点在 D 的边界上

D. $f(x,y)$ 的最大值点在 D 的内部, 最小值点在 D 的边界上

(3)26 版 1000 第十三章基础 18

18.设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 内有一阶偏导数.若 $f(x,y)$ 在 D 的边界 ∂D 上的值均为 0, 且 $\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial x}+\frac{\partial[f(x,y)]}{\partial y}=f(x,y)$, 则 $f(x,y)$( ).

A. 在 D 内有正的最大值

B. 在 D 内有负的最小值

C. 只在 D 的边界 ∂D 上取到最大值

D. 在 D 的边界 ∂D 上可以取到最小值

(4)900 第四章数二 B 类 18

18 设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, 则 ( )

A. 若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\neq 0$, 则 $u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得.

B. 若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\neq 0$, 则 $u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得.

C. 若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$, 则 $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得.

D. 若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0$, 则 $u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得.

***b*) 闭区域**

(1)2005 数二

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$, 并且 $f(1,1)=2$.求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

(2)2007数一

求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\}$上的最大值和最小值.

(3)900第四章数二A类44

44 求函数$f(x,y)=x^2+4y^2-2x^2y^2$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+2y^2\leqslant 4,x\geqslant 0\}$上的最大值和最小值.

(4)880第四章基础解答7

求函数$z=x^3-3x^2-3y^2$在闭区域D:$x^2+y^2\leqslant 16$上的最大值.

(5)26版660数一二三第252题

252 函数 $z=x^2+y^2-6x+8y$ 在圆域 $x^2+y^2\leqslant 100$ 上的最大值与最小值分别是

A. $200,-25$.　　B. $180,0$.　　C. $205,-15$.　　D. $190,10$.

(6) 姜晓千强化例题

【例 5.16】设 $z=f(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}z=(2x+12y)\mathrm{d}x+(12x+4y)\mathrm{d}y$, 且 $f(0,0)=0$, 求 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid 4x^2+y^2\leqslant 25\}$ 上的最大值与最小值.

(7)880 第四章综合解答 14

【14】已知 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=(y-x^2)\mathrm{d}x+(x-1)\mathrm{d}y$, 且 $f(1,1)=-\frac{1}{3}$, 求 $f(x,y)$ 在 D:$0\leqslant y\leqslant 7-x, 0\leqslant x\leqslant 7$ 上的最大值.

(8)900 第四章数二 A 类 45

45 求函数 $f(x,y)=xy(4-3x^2+y)$ 在闭区域 D 上的最大值和最小值, 其中区域 D 是由曲线 $y=3x^2$ $(x\geqslant 0)$, 直线 $y=3$ 及 y 轴所围成的闭区域.

(9)26版1000第十三章强化36

36.设$D=\{(x,y)\mid x+y\leqslant 3,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$, 求函数$f(x,y)=2x^3+2y^3-6x-6y+5$在区域$D$上的最大值与最小值.

(10)26版660数一二三第102题

102 函数$f(x,y)=x^2+y^2$在区域$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2+8x-6y\leqslant 200\}$上的最小值与最大值分别是_____与_____.

(11)26版660数一二三第237题

237 函数 $f(x,y)=1+x+y$ 在区域 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上的最大值与最小值之积为

A. -1.　　B. 1.　　C. $1+\sqrt{2}$.　　D. $1-\sqrt{2}$.

(12)26版660数一二三第250题

250 设 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$, 区域 $D=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 4,-1\leqslant y\leqslant 1\}$, 则下面结论正确的是

A. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点且是 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值点.

B. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点但不是 $f(x,y)$ 在区域 D 上的最大值点.

C. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

D. 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的驻点, 但不是极值点.

c) 确定多元函数不等式参数取值范围

(1)2019年江苏省高等数学竞赛题 (重点)

[例 5.14] (江苏省高等数学竞赛题,2019年) 证明: 当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时, $e^{x+y-2}\geqslant \frac{1}{12}(x^2+3y^2)$.

(2)2022 数一

当 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 时, $x^2+y^2 \leqslant k e^{x+y}$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 _____

(3)880 第四章基础解答 3

设当 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 时, 有 $\left|x^2-y^2\right| \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \leqslant k$ 成立, 求 k 的最小值.

(4)26 版 1000 第十三章基础 21

21.设 $\mathrm{e}^x+y^2+|z|=3$, 其中 x, y, z 为实数, 若 $\mathrm{e}^x y^2|z| \leqslant k$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 _____.

d) 数一专项

(1)2024 数一

已知函数 $f(x,y)=x^3+y^3-(x+y)^2+3$, 设 T 是曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切平面, D 为 T 与坐标平面所围有界区域在 xOy 平面上的投影.

(I) 求 T 的方程;

(II) 求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值和最小值.

(2)880 第四章综合解答 11

【11】设可微函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处沿 $l_1=(-1,0)$ 与 $l_2=(0,1)$ 的方向导数分别为 x^2-y 与 $1-x$, 且 $f(1,1)=-\frac{1}{3}$.

(1) 求 $f(x,y)$;

(2) 求 $f(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 7-x, 0\leqslant x\leqslant 7\}$ 上的最大值.